Отчёт за 2020 год по проекту «О свободных теориях и мотиве проективной квадрики»

Андрей Лавренов

1 Обзор проекта

Мой проект посвящён изучению обобщённых чистых мотивов проективной квадрики, где в определении категории соответствий вместо групп Чжоу CH^* используется произвольную ориентированную теорию когомологий в смысле Левина–Мореля.

Рассматривая произвольные теории когомологий, мы хотим получить инварианты многообразий, которые проще мотивов Чжоу, однако помнят больше информации, чем K^0-мотив. В первую очередь мы рассматриваем K-теории Моравы $\mathrm{K}(n)^*$, это серия теорий, которая в некотором смысле стартует с K^0 и сходится к CH^*.

В своей работе в 2020 году я интересовался в первую очередь мотивами проективных квадрик и связанными вопросами.

2 Полученные результаты

В своей заявке я формулировал две задачи, которыми собираюсь заниматься в 2020 году: установить $\mathrm{K}(n)$-мотивное разложение общей квадрики, и доказать стабилизацию $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$ с ростом m. Обе задачи действительно удалось решить.

Во первых, как и планировалось, удалось установить точное разложение $\mathrm{K}(n)$-мотива общей проективной квадрики. До начала проекта уже было известно, что $\mathrm{K}(n)$-мотив любой квадрики достаточно большой размерности по сравнению с n разложим, однако точный вид разложения общей квадрики не был известен. Совместно с Никитой Семёновым мы доказали теорему о том, что $\mathrm{K}(n)$-мотив квадрики размерности $0 < D < 2^n - 1$ *вообще говоря* неразложим, а от $\mathrm{K}(n)$-мотива квадрики большей размерности D всегда можно отщепить $D + 2 - 2^n$ (сдвинутых) мотивов точки, и дополнительное слагаемое будет *вообще говоря* неразложимо. Точная формулировка теоремы использует понятие общей квадрики, то есть, проективной квадрики, определяемой квадратичной формой $\langle a_1, \ldots, a_{D+2}\rangle$, где a_i являются независимыми трансцендентными переменными.

Теорема. *Пусть Q — общая квадрика размерности $D > 0$, и $n > 1$; обозначим $N = 2^n$ для чётного $D = 2d$, и $N = 2^n - 1$ для нечётного $D = 2d + 1$. Тогда $\mathrm{K}(n)$-мотив Q имеет неразложимое слагаемое ранга $\min(N, 2d + 2)$, и ещё $\max(0, 2d + 2 - N)$ слагаемых, изоморфных мотивам Тейта.*

С изучением $\mathrm{K}(n)$-мотивов однородных проективных многообразий тесно связан вопрос вычисления $\mathrm{K}(n)^*$ от соответствующей группы; в случае квадрики это ортогональные или спинорные группы. Второй задачей, которую я формулировал в заявке, было доказательство стабилизации $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ с ростом m, а именно, что при $m > 2^{n+1}$ естественное отображение из $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ в $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_{m-2})$, индуцированное вложением групп, является изоморфизмом. Эта теорема была доказана мной совместно с Виктором Петровым. Аналогичные результаты получены и для группы SO_m.

Теорема. *Пусть k — поле характеристики 0, и $\mathrm{K}(n)^*(-;\mathbb{F}_2)$, $n > 1$, обозначает K-теорию Моравы с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$. Для группового многообразия Spin_m над k, где $m \geq 2^{n+1}+1$, каноническое отображение $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_{m-2};\mathbb{F}_2)$ является изоморфизмом.*

Результаты опубликованы в нашем совместном препринте.

Кроме того, в настоящее время я занимаюсь ещё одной темой, не вполне связанной с K-теорией Моравы. Она посвящена далёким аналогам проблемы Серра, в частности, вычислению вторых гомологий расщепимых односвязных групп Шевалле, например, $\mathrm{H}_2\big(\mathrm{Spin}_m(k[X_1,\dots,X_n]),\,\mathbb{Z}\big)$, где k — поле. В этой области совместно с Егором Воронецким и Сергеем Синчуком мы описали функтор $\mathrm{K}_2(\mathsf{F}_4,\,-)$, построенный при помощи $+$-конструкции Квиллена по односвязной группе Шевалле $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathsf{F}_4,\,-)$, в стиле книги Милнора «Введение в алгебраическую K-теорию», то есть, через ядро гомоморфизма из группы, заданной явными образующими и соотношениями, в группу $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathsf{F}_4,\,-)$.

Теорема. *Пусть R — коммутативное кольцо, $G = \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathsf{F}_4,\,R)$ обозначает односвязную группу Шевалле типа F_4, и $\mathrm{K}_2^{\mathrm{Q}}(\mathsf{F}_4,\,R) = \pi_2(\mathrm{B}G^+)$ обозначает K_2-функтор, построенный при помощи $+$-конструкции Квиллена. Обозначим через $\mathrm{K}_2^{\mathrm{St}}(\mathsf{F}_4,\,R)$ ядро естественного отображения из группы Стейнберга $\mathrm{St}(\mathsf{F}_4,\,R)$ типа F_4 в группу G. Тогда точна последовательность*

$$0 \longrightarrow R/(t^2-t \mid t \in R) \longrightarrow \mathrm{K}_2^{\mathrm{Q}}(\mathsf{F}_4,\,R) \longrightarrow \mathrm{K}_2^{\mathrm{St}}(\mathsf{F}_4,\,R) \longrightarrow 0,$$

в частности, определения K_2 совпадают тогда и только тогда, когда R не имеет полей вычетов из двух элементов.

Система корней F_4 оставалась последней, для которой результат такого типа не был известен.

3 Публикации и препринты

A. Lavrenov, V. Petrov, N. Semenov, «Morava K-theory of orhogonal groups and motives of projective quadrics» (2020) 1–35, `arXiv:2011.14720`.

A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, «Centrality of K_2 for Chevalley groups: a pro-group approach» (2020) 1–32, `arXiv:2009.03999`.

4 План дальнейших исследований

Доказанная нами теорема о стабилицации K-теории Моравы является шагом на пути к вычислению $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$. Следующий шаг, а именно, анализ маленьких m, к настоящему моменту тоже выполнен: Павел Сечин показал, что до наступления стабилизации $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$ совпадает с $\mathrm{CH}^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2[v_n^{\pm 1}])$ *как алгебра*.

Стуктура *коалгебры*, однако, на настоящий момент не известна. Вместе с тем, она имеет значение для описания $\mathrm{K}(n)$-мотивных разложений, поскольку, $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$ ко-действует на $\mathrm{K}(n)^*(X; \mathbb{F}_2)$ соответствующий ортогональных грассманианов и квадрик X, и при этом мотивное разложение согласовано с разложением $\mathrm{K}(n)^*(X; \mathbb{F}_2)$ как $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$-комодуля. Описание структуры алгебры Хопфа на $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m; \mathbb{F}_2)$ будет одним из направлений моих дальнейших исследований.

Кроме того, благодаря частичным вычислениям Нобуаки Ягиты алгебраических кобордизмов исключительных расщепимых простых групп G, Виктор Петров и Никита Семёнов описали $\mathrm{K}(n)^*(G; \mathbb{F}_p)$ для почти всех таких G и простых p, однако не для всех. Другим направлением моих исследований будет вычисление $\mathrm{K}(n)^*(G; \mathbb{F}_p)$ от простых расщепимых (не обязательно исключительных) групп. Прежде всего, из имеющегося вычисления в случае $G = \mathrm{Spin}_m$ интересно было бы вывести случаи других групп G типов B_l и D_l. Над этим мы работаем в настоящий момент вместе с Павлом Сечиным.

Ещё одним вопросом, естественно продолжающим уже проведённые исследования, является анализ мотивных разложений однородных проективных многообразий относительно K-теорий Моравы с разными коэффициентами: $\mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{F}_2$, $\overline{\mathbb{F}_2}$. В настоящий момент известно, что для любой квадрики мотивное разложение с $\mathbb{Z}_{(2)}$ и $\mathbb{F}_2$ коэффициентами совпадает, однако гипотетически это верно для всех однородных проективных многообразий G/P для *простой* группы G. Кроме того, переход от $\mathbb{F}_2$ к $\overline{\mathbb{F}_2}$ представляет теоретический интерес, поскольку все теории с $\overline{\mathbb{F}_2}$-коэффициентами изоморфны либо K-теориям Моравы, либо Чжоу. Гипотетически, для всех однородных проективных многообразий G/P для группы G *внутреннего типа* мотивные разложения любой свободной теории с $\mathbb{F}_2$- и $\overline{\mathbb{F}_2}$-коэффициентами должны совпадать. Такой результат показал бы, что с точки зрения мотивных разложений таких многообразий G/P действительно естественно ограничиваться K-теориями Моравы.

5 Участие в конференциях и школах

В этом году мне не удалось принять участие в работе конференций или школ. Однако я был организатором или соорганизатором нескольких семинаров, которые в этом году перешли в онлайн. Этой весной совместно с Алексеем Ананьевским я занимался организацией семинара по мотивам, $\mathbb{A}^1$-топологии и K-теории в Лаборатории Чебышева в Санкт-Петербурге, летом совместно с Павлом Сечиным из Регенсбурга мы организовали онлайн-семинар о стэке формальных групп, а этой осенью я организовал онлайн-семинар о модулях Роста.

6 Работа в научных центрах и международных группах

В этом году у меня была позиция научного сотрудника в международном математическом институте Леонарда Эйлера в Санкт-Петербурге.

7 Педагогическая деятельность

В этом году я вёл одну пару в неделю на факультете математики и компьютерных наук в Санкт-Петербургском Государственном Университете.