Отчёт Осипова Павла Сергеевича

1. Проведённые исследования

1.1. **Самоподобные гессиановы многобразия.** Работа [O1] доработана и подана в Journal of Geometry and Physics.

Самоподобный римановы многообиразием называется риманово многообразие (C, g), оснащённое полем ξ, таким что $\mathfrak{L}_\xi g = 2g$. Самоподобное многообразие (M, g, ξ) называется **потенциальным**, если ξ является градиентом функции. **Плоское аффинное многообразие** — это многообразие оснащённое плоской связностью без кручения. **Самоподобным гессиановым многообразием** (M, ∇, g, ξ) называется гессианово многобразие (M, ∇, g), оснащённое векторным полем ξ, таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M, g, ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразие (M, ∇) называется радиантным, если $\nabla\rho = \mathrm{Id}$. В окрестности каждой точки существует локальная плоская система координат, в которой радиантное поле имеет вид $\rho = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Назовём самоподобное гессианово многообразие (M, ∇, g, ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda\xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 1 ([O1])**.** *Пусть (C, ∇, ξ) — самоподобное гессианово многобразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многообразий. Кроме того, если поле ξ потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C, ∇, g, ξ) — радиантное гессианово многобразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.*

1.2. **Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия.** Статья [O2] подана в Differential Geometry and its Application.

Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется **регулярным**, если он не соержжит ни одной полной прямой. Трубчатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченно обрласти в $\mathbb{C}^n$. Все комплескные области, возникающие таким образом, называетются **областями Зигеля первого рода**. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусов и комплексные аффинные автоморфизмы соответствющих трубчатых областей. В этих соглашениях область $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ однородна тогда и только тогда, когда конус V однороден. Однородные выпуклый конус допускает инвариантную гессианову структуру, по ней можно построить инвариантную кэлерову структуру на соответствующей области Зигеля первого рода.

Я модифицирую конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях Зигеля первого рода для получения некоторого класса однородных конформно кэлеровых многообразий и однородных конформно гиперкэлеровых многообразий.

Однородным (глобально) конформно кэлеровым многообразием называется однородное комплексное многообразие (X, G, I) с G-инвариантной римановой метрикой $g_{c.K.}$ конформно эквивалентной некоторой кэлеровой метрике $g_{K.}$ (метрика $g_{K.}$ не обязательно G-инвариантна).

Теорема 2 ([O2])**.** *Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структуру.*

В частности, я строю инвариантную конформно кэлерову метрику на любой области Зигеля первого рода.

Теорема 3 ([O2])**.** *Пусть (M,∇,g,ξ) односвязное самоподобное специальное кэелерово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M,∇,g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi,\xi)=1\}$. Тогда T^*M допускает однородную конформно гиперкэелерову структуру.*

1.3. **Компактные локально конформно Гессиановы многообразия.** В настоящий момент я завершаю написание статьи с явным описанием таких многообразий. Статистическим многообразием называется риманово многообразие (M,g) оснащённое плоской связностью без кручения такой, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Статистической многообразие является статистическим многообразием постоянной кривизны C, если тензор кривизны связности ∇ равен

$$\theta(X,Y)(Z)=c(g(Y,Z)Z-g(X,Z)Y)$$

для любых $X,Y,Z\in TM$ю

По аналогии с локально конформно кэлеровыми многообразиями Павел Осипов определяет докально конформно гессианово многообразия. Это риманово многообразие (M,g) оснащённое плоской связностью без кручения такой, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Не сложно проверяется что в этом случае метрика g действительно конформно экивалентна некоторой гессиановой.

Теорема 4. *Пусть (C,g,∇) локально конформно гессианово многообразие. Тогда существует некоторый набор статистических многообразий постоянной кривизны $\{(M,g_i,D_i)\,|1\leq i\leq k\}$ таких что (C,g) локально изометрично многообразию $\left(\left(\prod_{i=1}^k M_i\right)\times\mathbb{R}^k,\sum_{i=1}^k\left(g_i+ds_i^2\right)\right)$.*

Теорема 5. *Пусть (C,∇,g) компактное локально конформно гессианово многообразие с аффинным киллинговым полем Ли. Тогда существует натуральное число k такое что (C,g) допускает риманову субмерсию на тор $p:C\to T^k$. Кроме того слои M изометричны произведению нескольких k статистических многообразий постоянной кривизны и $C=\left(M\times\mathbb{R}^k\right)/\Gamma_k$, где Γ_k свободная группа из k образующих, оснащённая некоторым действием на $M\times\mathbb{R}^k$.*

1.4. **Статистические алгебры Ли постоянной кривизны и локально конформно кэлеровы алгебры Ли.** Статистической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$ оснащённое плоской связностью без кручения ∇ и билинейной формой g такими, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Статистическая алгебра Ли является статистической алгеброй Ли постоянной кривизны C, если тензор кривизны связности ∇ равен

$$\theta(X,Y)(Z)=c(g(Y,Z)Z-g(X,Z)Y)$$

для любых $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

Локально комформно симлектической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$, оснащённая 2-формой ω и 1-формой θ такими что $d\omega=\theta\wedge\omega$. Локально комформно кэлеровой алгеброй Ли называется Локально комформно симлектическая алгеброй Ли $\mathfrak{g},\omega,\theta$ вместе с комплексной структурой I, такие что билинейная форма $\omega(*,I*)$ положительно определена. Я строю по любой n-мерной статистической алгебре Ли $2n+2$-мерную локально конформно кэлерову алгебры Ли.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Работа [O1] подана в Journal of Geometry and Physics, [O2] подана в Differential Geometry and its Applications, кроме того я написал препринт [O3]ю

3. Конференции и школы

Summer Geometry Fest 23-25 июня 2021, Москва, ФМ ВШЭ.

4. Доклады

Доклад "самоподобные гессиановы многообразия"на семинаре "Геометрические структуры на многообразия"09.09.2021.

5. Работа в научных центрах и международных группах

В этом году я работал стажёром-исследователем в Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений (НИУ ВШЭ).

6. Педагогическая практика

Я веду семинары по математике для философов в НИУ ВШЭ. Кроме того, я принимал задачи на курсе симплектической геометрии Миши Вербицкого.

Список литературы

[O1] P. Osipov *Selfsimilar Hessian manifolds*, preprint, arXiv:1908.01731, submitted to Journal of Geometry and Physics.

[O2] P. Osipov *Selfsimilar Hessian and conformally Kähler manifolds*, preprint, arXiv:2012.03791, submitted to Differential Geometry and its Applications.

[O3] P. Osipov *Statistical Lie algebras of a constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras* preprint, arXiv:2112.06686.