ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ГРАНТУ ФОНДА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» (КОНКУРС 2019 Г.) ЗА 2022 Г.

ВЕРЁВКИН ЯКОВ АЛЕКСАНДРОВИЧ

1. Результаты, полученные в 2022 г.

Продолжено изучение топологии, торической топологии, полиэдральных произведений, момент-угол комплексов, коммутанта прямоугольной группы Кокстера, нижнего центрального ряда прямоугольной группы Кокстера в соответствии с основными направлениями, заявленными в проекте.

Прямоугольная группа Артина является группой с m образующими $g_1, \dots, g_m$ и соотношениями коммутирования $g_i g_j = g_j g_i$ для некоторых пар $\{i, j\}$. Каждая такая группа задаётся графом с m вершинами, где пары вершин соединяются ребром, если соответствующие образующие коммутируют. Наряду с прямоугольными группами Артина рассматриваются прямоугольные группы Кокстера, в которых образующие удовлетворяют дополнительным соотношениям $g_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, m$. Прямоугольные группы Артина и Кокстера являются классическими объектами в геометрической теории групп.

Нижний центральный ряд группы G — это последовательность групп G_i, которые определяются индуктивно по правилу:

$$G_1 = G, \quad G_{n+1} = (G_n, G),$$

где группа (K, H) для некоторых подгрупп $K, H \subset G$ является группой, порождённой коммутаторами вида (k, h), где $k \in K, h \in H$.

Присоединённой алгеброй Ли, соответствующей группе G, называется алгебра Ли

$$L_G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i / G_{i+1}.$$

Рассмотрим алгебру Ли

$$L_{\mathcal{K}} = FL\langle u_1, \dots, u_n \rangle / ([u_i, u_j] = 0, \text{если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $FL\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ — свободная алгебра Ли от n образующих. Обратим внимание, что и алгебра Ли $L_{\mathcal{K}}$, и группа $RA_{\mathcal{K}}$ зависят только от 1-остова (графа) $sk_1\mathcal{K}$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

В работе [1] был построен базис 4-й градуированной компоненты присоединённой алгебры Ли для прямоугольных групп Кокстера, соответствующих симплициальным комплексам на 3 точках. Также построен базис для 4-й градуированной компоненты присоединённой алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера, соответствующей симплициальному комплексу на 4 точках – свободному произведению 4-х экземпляров $\mathbb{Z}_2$. В отличие от базисов, построенных в работе Waldinger, базисы, построенные в данной работе, состоят полностью из простых вложенных коммутаторов. Также получены соотношения 4-й градуированной компоненты присоединённой алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера, соответствующей дискретному набору из m точек.

В работе [2] был полностью описан базис 4-й градуированной компоненты присоединённой алгебры Ли для прямоугольных групп Кокстера, соответствующих симплициальным комплексам на 4 точках. Также был приведён алгоритм, который выписывает базис 4-й градуированной компоненты присоединённой алгебры Ли для прямоугольных групп Кокстера в общем случае. Данный результат является шагом в решении проблемы описания присоединённой алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера в общем случае. Похожая задача рассматривалась в работах R. Struik, где возникли сложности после 3-й градуированной компоненты, в результате чего 4-я компонента не была описана. Работа [2] подана в Математические заметки.

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

Опубликовано (1):

[1] Я. А. Верёвкин, *Градуированные компоненты присоединенной алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера*, Торическая топология, действия групп, геометрия и комбинаторика, Сборник статей, Труды МИАН, 317, МИАН, М., 2022.

Подано в печать (1):

[2] Я. А. Верёвкин, *О последовательных факторах нижнего центрального ряда прямоугольных групп Кокстера*, arXiv: to be posted, 2022.

3. Участие в конференциях и школах.

- Организатор International School "Toric topology, combinatorics and data analysis", October 3-9, 2022, Saint Petersburg, Russia;
- Семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. Ломоносова "Избранные вопросы алгебры", 16 февраля 2022 года, МГУ, Москва, Россия.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь руководителем гранта РНФ № 21-71-00049 «Торическая топология и геометрическая теория групп».

Являюсь членом гранта РФФИ № 20-01-00675 «Действия тора в задачах алгебраической топологии».

Являюсь членом гранта РНФ № 20-11-19998 «Топология, геометрия и комбинаторика многообразий с действием групп».

5. Педагогическая деятельность.

С 2009 г. работаю преподавателем на малом механико-математическом факультете МГУ (с 2013 г. —главный в группе, где веду занятия, с 2015 г. —заместитель главы параллели, с 2020 г. —начальник параллели начальных классов), также на малом мехмате веду семинар для школьников 9-11 классов. Провожу семинары на механико-математическом факультете МГУ по аналитической геометрии (для студентов 1 курса), линейной алгебре и геометрии (1 курс), введении в топологию (2 курс), высшей алгебре (1 курс). Принимаю коллоквиумы и экзамены по аналитической геометрии (1 курс), линейной алгебре и геометрии (1 курс), введении в топологию (2 курс), дифференциальной геометрии (2 курс), дифференциальной геометрии и топологии (3 курс), высшей алгебре (1 курс). Вёл семинары в НМУ на различных курсах (топология). Вёл семинары в ВШЭ (сентябрь - октябрь 2019, 2020, 2021 годов). Также с 2020 года работаю доцентом ВШЭ, веду курс по математическому анализу, семинары.

6. Итог 3 лет.

Всего в 2019-2022 гг. опубликованы 2 статьи, а также принято участие в конференциях:

- International School "Toric topology, combinatorics and data analysis", October 3-9, 2022, Saint Petersburg, Russia;
- Семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. Ломоносова "Избранные вопросы алгебры", 16 февраля 2022 года, МГУ, Москва, Россия.
- "Topology of torus actions and related topics" (24-29 October 2021), Россия, Сочи.
- "Algebraic Topology and Applications" (20-21 Decembet 2021), Россия, Москва, МИАН.
- "Winter Graduate School in Toric Topology" (13-17 January 2020), Canada, Toronto.
- "Workshop on Polyhedral Products in Homotopy Theory" (20-24 January 2020), Canada, Toronto.
- "Topology and geometry of group actions" (18-22 November), Москва, ВШЭ.

В исходной заявке были обозначены следующие 2 направления в рамках исследований момент-угол-многообразий и полиэдральных произведений.

Топология. Планируется продолжить исследование гомотопических типов момент-угол-комплексов и общих полиэдральных произведений при помощи различных методов. Также планируется исследовать алгебры Понтрягина различных момент-угол-комплексов, в частности исследовать алгебры Понтрягина момент-угол-комплексов границ многоугольников, а также найти связь этих результатов с результатами в геометрии групп. Исследование алгебры Понтрягина даст возможность изучить топологическую структуру момент-угол-комплексов. Наличие единственного соотношения. В частности, хорошо известно, что момент-угол-комплекс границы многоугольника гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер (McGavran). Связная сумма произведений сфер получается из букета сфер приклеиванием одной клетки. У букета сфера алгебра Понтрягина свободна, приклейка одной клетки добавляет одно соотношение. Соотношение, которое автор ищет в алгебре Понтрягина, имеет прямую связь с произведениями Уайтхеда. Именно по этому соотношению (сумма произведений Уайтхеда) и приклеивается клетка к букету сфер. Отсюда следует полное описание соответствующей алгебры Понтрягина.

Алгебраической моделью для алгебры Понтрягина $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ является кобар-конструкция $(\Omega_*\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle, d)$ коалгебры Стенли-Райснера

$$\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle = \mathbb{Z}\langle v_\sigma = v_{i_1}^{\alpha_1}\dots v_{i_k}^{\alpha_k} : \sigma = \{i_1\dots i_k\} \in \mathcal{K}\rangle.$$

А именно, имеет место изоморфизм алгебр $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \cong H(\Omega_*\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle, d)$. Рассмотрим следующую ассоциативную некоммутативную алгебру

$$T_\mathcal{K} \cong T\langle\mu_1,\dots,\mu_m\rangle/(\mu_i^2 = 0, \mu_i\mu_j + \mu_j\mu_i = 0 \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}),$$

где $T\langle\mu_1,\dots,\mu_m\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра от m образующих степени 1.

Можно доказать, что $H(\Omega_*\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle, d)$ содержит подалгебру, изоморфную $T_\mathcal{K}$. В случае флагового комплекса $\mathcal{K}$ имеет место изоморфизм $T_\mathcal{K} \cong H(\Omega_*\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle, d)$. В случае нефлагового комплекса $\mathcal{K}$ этот изоморфизм не имеет место в виду наличия высших произведений Уайтхеда (Самельсона) в $\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$. Описание алгебры Понтрягина в общем случае является открытой проблемой. Планируется использовать кобар-конструкцию для её описания.

Геометрия групп. Планируется продолжить исследование прямоугольных групп Артина и Коксетера и общих граф-произвдений, а также изучить взаимосвязи с граф-произведениями алгебр Ли на основе дальнейшего изучения нижнего центрального ряда. Далее интерпретировать эти алгебраические результаты топологически как свойства алгебр Понтрягина, которые являются универсальными обёртывающими рассматриваемых алгебр Ли. Параллель между результатами из теории групп, полученных в работе автора 2016 года, и теории алгебр Ли, полученных в работе Грбич, Панов, Терио, Ву даёт возможность предполагать наличие связи между этими результатами. В частности эта связь даёт возможность находить соотношения в коммутантах прямоугольных групп Артина и Коксетера, анализируя соотношения в алгебрах Ли.

По второму направлению задачи в основном выполнены, по результатам исследований опубликованы работы [1] и [2].

По первому направлению (топология) также есть результаты: определены связи с алгеброй Понтрягина для прямоугольных групп Артина, а также в некоторых частных случаях прямоугольных групп Кокстера. Продолжено исследование кобар-конструкции, имеющей прямое отношение к данному направлению, что может в будущем дать результаты, близкие к данной теме.

Email address: verevkin_j.a@mail.ru