Отчет по конкурсу "Молодая математика России".

Никита Клемятин.

1 Проведенные исследования.

1.1 Сходимость Громова-Хаусдорфа многообразий Калаби-Яу.

Пусть $(M, g, \omega, J, \Omega)$ – многообразие Калаби-Яу, т.е. комплексное многообразие с эрмитовой (не обязательно кэлеровой) метрикой $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ и голоморфной $(n, 0)$-формой Ω, которая в каждой точке отлична от нуля. Предположим, что наша метрика "конформно балансированная"в следующем смысле: $d(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-1}) = 0$. Рассмотрим следующее уравнение на семейство метрик:

$$\partial_t(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-1}) = i\partial\overline{\partial}(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-2}).$$

Это параболическое уравнение, аналогичное потоку Риччи в кэлеровой и римановой геометрии. Оно сохраняет свойство метрики быть конформно балансированной и его стационарные точки являются кэлеровыми метриками. Т.е. данное уравнение дает способ деформировать эрмитову метрику в кэлерову. Данное уравнение было предложено в [5, 1] в качестве замены потоков Риччи на некэлеровых многообразиях, однако очень мало известно о поведении решений, сходимости и особенностях решений данного уравнения. Для решения этих вопросов нужен некоторый аналог теоремы Гамильтона (см. [2, 3]) и соответствующие результаты о сходимости Громова-Хаусдорфа многообразий Калаби-Яу. В работе [4] Клемятиным были получены соответствующие результаты. А именно, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1: Пусть $\{(M_j, g_j, J_j, \Omega_j, x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ -последовательность компактных многообразий Калаби-Яу, которые удовлетворяют следующим условиям:

(1) Кривизна Rm_j и кручение T_j связности Черна на (M_j, g_j, J_j) равномерно ограничены вместе со всеми своими ковариантными производными, т.е. существуют положительные константы C_k, не зависящие от j, что $|\nabla^k Rm_j|_{g_j} \leqslant C_k$ и $|\nabla^k T_j|_{g_j} \leqslant C_k$.

(2) Найдутся константы $C_1 \geqslant C_0 > -\infty$, такие что $C_1 \geqslant \log \|\Omega_j\|^2_{g_j} \geqslant C_0$.

(3) Все многообразия конформно балансированные: $d(\|\Omega\|^2_\omega \omega^{n-1}) = 0$.

Тогда, после возможного перехода к подпоследовательности, найдется полное многообразие Калаби-Яу $(M_\infty, g_\infty, J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$ с конформно балансированной метрикой, исчерпание $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ многообразия M_∞ и последовательность диффеоморфизмов $\Phi_j : U_j \to V_j \subset M_j$, $\Phi_j(x_\infty) = x_j$, таких что тройка $(\Phi_j^* g_j, \Phi_j^* J_j, \Phi_j \Omega_j)$ сходятся к $(g_\infty, J_\infty, \Omega_\infty)$.

Из этой теоремы выводится теорема компактности для решений 1.1.

Теорема 1.2: Пусть $\{(M_j, g_j(t), J_j, \Omega_j, x_j)\}_{j=1}^\infty$ последовательность решений 1.1 на интервале $[\tau_0; \tau_1] \subset \mathbb{R}$, таких что:

(1) Существует константа C_0, такая что

$$|Rm_j|_{g_j} + |\nabla T|_{g_j} + |T|^2_{g_j} \leqslant C_0$$

(2) Существует константа $\iota_0 > 0$, такая что $\mathrm{inj}(M_j) \geqslant \iota_0$;

(3)Существует константа C_1, не зависящая от j, такая что $C_1 \leqslant \log ||\Omega_j||^2_{g_j}(\tau_0)$;

Тогда, после перехода к подпоследовательности, существует полное конформно балансированное многообразие Калаби-Яу $(M_\infty, g_\infty(t), J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$, исчерпание $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ многообразия M_∞, и последовательность диффеоморфизмов $\Phi_j : U_j \to V_j \subset M_j$, таких что $(M_j, g_j(t), J_j, \Omega_j, x_j)$ сходятся к полному решению $(M_\infty, g_\infty(t), J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$ уравнения 1.1.

С помощью предыдущих двух теорем Клемятин доказал теорему о структуре особенностей решения уравнения 1.1, аналогично таковой классификации для потоков Риччи, полученой Гамильтоном в [3].

Теорема 1.3: Пусть $\omega(t)$ является решением уравнения 1.1 на компактном конформно балансированном многообразии M, и пусть $[0, T)$ является максимальным отрезком, на котором оно существует. Предположим, что существует нижняя оценка на радиус инъективности решения. Тогда для подходящего выбора $t_j \to T$ и рескейлинга метрики $g_j(t) = C_j g(t_j + C_j^{-1} t)$, последовательность $g_j(t)$ допускает сходящуюся к решению 1.1 подпоследовательность, такую, что $f(t) := \sup_M(|Rm|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4)$ удовлетворяет в точности одному из следующих свойств:

(1) Решение существует на интервале $(-\infty, c)$ и $f(t) \leqslant \frac{C}{c-t}$;

(2) Решение существует при всех $t \in \mathbb{R}$ и $f(t) \leqslant C$;

(3) Решение существует на интервале $(-A, \infty)$ и $f(t) \leqslant \frac{A}{A+t}$.

2 Препринты на ArXiv.

Nikita Klemyatin, *Convergence of Hermitian manifolds and the Type IIB flow*, arXiv:2109.00312

3 Школы и конференции.

Летняя школа CIRM-ICTP Complex Analysis and Geometry - XXV (7 - 11 June 2021) (в Zoom).

4 Преподавание.

Вел семинары по линейной алгебре в совместном бакалавриате ВШЭ-РЭШ весной 2021 года. Также принимал задачи по дифференциальной геометрии в НМУ, тоже весной 2021 года.

Список литературы

[1] T. Fei, D. H. Phong, S. Picard, and X.W. Zhang, *Estimates for a geometric flow for the Type IIB string*, arXiv: 2004.14529, to appear in Math. Ann. (2021). (Cited on page 1.)

[2] R.S. Hamilton, *A compactness property for solutions of the Ricci Flow*, Amer. J. Math. 117, No. 3 (1995) 545-572. (Cited on page 1.)

[3] R.S. Hamilton, *Formation of singularities of the Ricci Flow*, Surveys in Differential Geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), Int. Press. (Cited on pages 1 and 2.)

[4] Nikita Klemyatin, *Convergence of Hermitian manifolds and the Type IIB flow*, arXiv:2109.00312 (Cited on page 1.)

[5] D.H. Phong, *Geometric partial differential equations from unified string theories*, arXiv:1906.03693. (Cited on page 1.)