Отчет за 2021 год по гранту конкурса «Молодая математика России»

Семенов Андрей Вячеславович

1. Описание полученных по проекту результатов

Цель проекта и полученный результат

Наша цель состоит в том, чтобы обобщить на случай произвольных полей результаты Ацуямы, вычислившего многообразия прямых, проходящих через две точки в специальных положениях, на вещественных симметрических пространствах EIII и EVI. Здесь частный случай для EIII, когда группа типа E_6 расщепляется квадратичным расширением, был уже разобран Фельдкампом. Мы хотим обобщить все известные результаты для EIII на случай произвольной (не обязательно расщепляющейся) группы типа E_6 и далее на произвольное поле F характеристики не 2 и не 3 для (любой) группы типа E_7 и симметрического пространства типа EVI, используя геометрию подалгебр в неассоциативных алгебрах.

В настоящее время полностью решена задача для симметрического пространства типа EIII над F: построена геометрия точек и прямых на пространстве $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$, а также вычислено многообразие прямых, проходящих через две точки в разных положениях. Готовится к выходу статья [5] (см. раздел «Опубликованные и поданные в печать работы»).

Имеются существенные продвижения в случае EVI над F: так, получен ответ в анизотропном случае для многообразия прямых, проходящих через две точки в общем положении.

Результаты проекта: тип EIII

Пусть F — поле характеристики не 2 и не 3 и K — его квадратичное расширение. Обозначим через B алгебру Брауна $B(A)$ (единственной) 27-мерной алгебры Альберта над F. Она имеет структуру структурируемой алгебры, и можно рассмотреть ее кватернионные подалгебры (в смысле структурируемых алгебр).

Лемма 1. *Множество $\mathcal{Q}$ кватернионных подалгебр в B биективно множеству рациональных точек симметрического пространства типа $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$.*

Заметим, что множество рациональных точек симметрического пространства типа $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$ является открытым аффинным в сужении Вейля $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_1)$, где P_i — максимальная параболическая подалгебра, ассоциированная с корнем α_i в диаграмме Дынкина E_6 (нам будут необходимы P_1 и P_6, обе имеют подгруппу Леви типа D_5 в E_6). Тогда можно доказать следующую

Лемма 2. *Если $Aut(B)^o$ анизотропна как алгебраическая группа, то дополнение к $\mathcal{Q}$ не имеет рациональных точек.*

Теперь рассмотрим отображение $\pi(Q) = K_Q^\perp \cdot B$, где $Q \in \mathcal{Q}$ и $K_Q^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к K в Q, а умножение поточечное.

Лемма 3. *$\pi(Q)$ является подалгеброй в B и $\dim_F \pi(Q) = 22$ для любой кватернионной подалгебры Q в B. Более того, π индуцирует биекцию открытых подмногообразий в $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_1)$ и $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_6$ соответственно.*

Полезно представлять себе, что такое $\pi(Q)$. Над алгебраическим замыканием $\overline{F}$ поля F кватернионная подалгебра Q ассоциирована с парой идемпотентов (e, e') и имеет вид $Q = \begin{pmatrix} F & e'F \\ eF \times A & F \end{pmatrix}$, а $\pi(Q)$ над K имеет вид $\pi(Q)_K = \begin{pmatrix} K & e' \times A \\ e \times A & K \end{pmatrix}$, где линейное пространство $e \times A = H_2(\mathbb{O})$ имеет размерность 10 и является подалгеброй A, а ее стабилизатор является параболической подгруппой типа P_6.

Будем называть кватернионные подалгебры в B **точками**, а 22-мерные подалгебры, которые имеют вид $\pi(Q)$ — **прямыми**. Точка Q **инцидентна** прямой L, если $Q \leqslant L$ как подалгебра. Таким образом, мы имеем геометрию на симметрическом пространстве типа EIII. Зададимся естественным вопросом: в каких положениях могут находиться наши точки и прямые?

Лемма 4. *Пусть G — группа внутреннего типа E_6, и пусть P_1 и P_6 — соответствующие параболические подгруппы. Тогда существуют фильтрации, чьи последовательные разности между соседними членами — аффинные расслоения над однородными многообразиями:*

$$\begin{tikzcd} G/P_6 \times G/P_6 & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^8"] & X & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & G/P_6 \\ & G/P_{1,6} & & G/P_{5,6}; & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G/P_6 \times G/P_1 & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^{16}"] & Y & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^5"] & G/P_{1,6} \\ & G/P_6 & & G/P_{5,6}. & \end{tikzcd}$$

Стрелки между аффинными расслоениями определяются формулами $P, Q \mapsto (P \cap Q) \cdot R_u(P)$, где P — типа P_6 и Q —типа P_6 или P_1 соответственно.

Таким образом, есть всего лишь три возможности для прямых (и точек соответственно): они могут либо совпадать, либо быть в общем положении, либо имеет место третий тип отношений, который мы назовем специальным. В частности, для двух точек Q_1, Q_2 подалгебра $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, порожденная ими, может давать размерность 4 (подалгебры совпали), 6 (специальное положение точек) или 8 (общее положение точек). Основным результатом нашей работы для случая EIII является следующая

Теорема 5.

1. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в общем положении, то они пересекаются не более чем в одной точке. Если к тому же $Aut(B)^o$ анизотропная группа, то они пересекаются ровно в одной точке.*

2. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в специальном положении, то множество точек, в которых они пересекаются, биективно множеству рациональных точек симметрического пространства $A_4/A_3 \cdot \mathbb{G})_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие в $R_{K/F}(\mathbb{P}^4)$.*

3. *Множество точек, принадлежащих данной прямой, биективно рациональным точкам симметрического пространства $D_5/D_4 \cdot \mathbb{G}_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие сужения Вейля K на F 8-мерной изотропной гладкой квадрики.*

Результаты проекта: тип EVI

Рассмотрим группу $E_7/(D_6 + A_1)$ над произвольным полем K характеристики не 2 и не 3. Используем следующую геометрическую реализацию: в качестве как **точек**, так и **прямых** возьмем подгруппы типа A_1 в E_7 с индексом Дынкина 1 (т.е. такие, централизатор которых имеет тип D_6 в E_7), и зададим **отношение инцидентности** следующим образом: точка B_1 индицентна точке B_2, если $xy = yx$ для всех $x \in B_1$ и $y \in B_2$.

Гипотеза состоит в том, что две «точки» (типа A_1) находятся в общем положении, если их централизаторы (они имеют тип D_6!) пересекаются по трем «точкам», т.е. их пересечение состоит из $A_1 + A_1 + A_1$ и возможно некоторого несущественного в редуктивном случае радикала. Две «точки» находятся в специальном положении, если выполняется аналог соответствующей формулы Ацуямы.

Мы допустили существование 56-мерного неприводимого представления V у исходной группы типа E_7. Над $D_6 = C_{E_7}(A_1)$ оно приводимо в виде суммы полуспинорного (32) и двух векторных (12): $V = 32 \oplus 12 \oplus 12$. На полуспинорном представлении есть структура тройки Фрейденталя, индуцированная с 56-мерного представления. Тогда для двух подгрупп H_1 и H_2 типа D_6 (которые задают некоторые две «точки») их пересечение стабилизирует представление $32 \cap 32$. Планируется доказать, что то, в какой позиции соответствующие «точки», определяется типом тройки Фрейденталя $32 \cap 32$, а они все классифицированы. Данная задача полностью решена для общего случая точек.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

В 2021 году мною были написаны представленные ниже работы, в каждой из которых есть благодарность гранту «Молодая математика России». Из них статья [1] уже опубликована, а статьи [2, 3, 4] являются препринтами, поданными в соответствующие журналы:

1. Andrei V. Semenov, A. Denisova, *On generating sets of infinite symmetric group*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 500, PDMI RAS, St. Petersburg, 2021, pp. 177-188.

2. Andrei V. Semenov, Alexander Generalov, *BV-structure on Hochschild cohomology for exeptional local algebras of quaternion type. Case of even parameter*, послан в журнал «Journal of Algebra», препринт: `https://arxiv.org/abs/2109.01814`

3. Andrei V. Semenov, Pavel Gvozdevsky, *Twisted forms of commutative monoid structures on affine spaces*, послан в журнал «Mathematische Nachrichten», препринт: `https://arxiv.org/abs/2109.108451`

4. Andrei V. Semenov, *BV-структура на когомологиях Хохшильда исключительных локальных алгебр кватернионного типа. Случай малого параметра*, послан в журнал «Алгебра и анализ», препринт: отсутствует в связи с незаконченным переводом.

Также завершается написание основной статьи моего гранта «Молодая математика России», в которой доказываются результаты, изложенные в пункте «Описание полученных по проекту результатов». Текущий текст работы можно запросить у меня напрямую.

5. Viktor A. Petrov, Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EIII*

3. Участие в конференциях и школах

В 2021 году я участвовал в следующих конференциях и школах:

1. Май 2021: конференция «One-Parameter Semigroups of Operators 2021», онлайн

2. Июнь 2021: 8th European Congress of Mathematics, On-Line, Portorož, Slovenia

3. Август 2021: конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара

4. Ноябрь 2021: мини-конференция «Complex and Harmonic Analysis and its applications», Санкт-Петербург

4. Работа в научных центрах и международных группах

С 2019 года я работаю инженером-исследователем междисциплинарной лаборатории им. П. Л. Чебышёва при СПбГУ. В этом году я также победил в конкурсе Международного математического института им. Эйлера поддержки аспирантов Санкт-Петербурга. Ссылка на список победителей: `https://eimi.ru/news/4714/`

5. Педагогическая деятельность

В течение года я осуществлял научное и педагогическое руководство над проектом Денисовой Александры, ученицы 10 класса ГБОУ СОШ 564 (город Санкт-Петербург). В проекте исследовались аспекты порождения группы биекций $S(\Omega)$ бесконечного множества Ω, был выведен критерий порождения для подмножеств группы $S(\Omega)$ специального вида, связанных с условием на мощности некоторых собственных подмножеств. С работой «Порождающие бесконечной симметрической группы» Александра добилась следующих успехов:

1. выиграла диплом I степени и секционную премию на Балтийском научно-инженерном конкурсе 2021 года. Ссылка: `https://baltkonkurs.ru/features/po-godam/2021-2/`

2. выиграла конкурс «Поддержка научного и инженерного творчества школьников старших классов», огранизованный комитетом по науке и высшей школе города Санкт-Петербург. Ссылка: `http://knvsh.gov.spb.ru/closedcontests/view/282/`

3. Была опубликована совместная статья [1] (см. раздел «Опубликованные и поданные в печать работы») по результатам этой работы.