

Отчет за 2022 год по гранту конкурса «Молодая математика России»

Семенов Андрей Вячеславович

1. Описание полученных по проекту результатов

Цель проекта и полученный результат

Наша цель состоит в том, чтобы обобщить на случай произвольных полей результаты Ацуюмы, вычислившего многообразия прямых, проходящих через две точки в специальных положениях, на вещественных симметрических пространствах EIII и EVI. Здесь частный случай для EIII, когда группа типа E_6 расщепляется квадратичным расширением, был уже разобран Фельдкампом. Мы хотим обобщить все известные результаты для EIII на случай произвольной (не обязательно расщепляющейся) группы типа E_6 и далее на произвольное поле F характеристики не 2 и не 3 для (любой) группы типа E_7 и симметрического пространства типа EVI, используя геометрию подалгебр в неассоциативных алгебрах.

В настоящее время поставленная задача решена полностью для пространств типа EIII и полностью с условием на характеристику для пространств типа EVI. Еще в прошлом году была построена и описана соответствующая геометрия точек и прямых на пространстве $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$. В данный момент соответствующая статья [1] опубликована.

В случае пространств $E_7/D_6 + A_1$ ситуация устроена значительно сложнее и интереснее: полностью получен ответ для произвольных полей характеристики нуль. В данный момент соответствующая статья [2] подана в журнал.

Результаты проекта: тип EVI

Изложим основные результаты статьи [2]. Сбалансированной симплектической тернарной алгеброй (ССТА для краткости) будем называть тернарную алгебру A с симплектической формой $\langle -, - \rangle$ такую, что выполнены следующие два свойства:

1. $xyz = yxz + \langle x, y \rangle z$;

2. $xyz = xzy + \langle y, z \rangle x$.

Фиксируем полупростую линейную группу G . Через $\mathcal{S}(G)$ мы будем обозначать многообразие всех подгрупп типа A_1 в G таких, что вложение соответствующих алгебр Ли имеет мультииндекс Дынкина $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (такие подгруппы далее называются микровесовыми). Тогда симметрическое пространство типа EVI можно реализовать как $\mathcal{S}(G)$ для некоторой группы G типа E_7 такой, что $\mathcal{S}(G)(F) \neq \emptyset$. Используя язык кватернионных гифтов, введенный в статье «A rational construction of Lie algebras of type E7» В. А. Петровым, а также используя теорию ССТА, мы доказали следующие технические леммы:

Лемма 1. Пусть H_1 и H_2 — централизаторы двух микровесовых подгрупп типа A_1 в G , и пусть $H_1 = \text{Aut}(W)$ для некоторого кватернионного гифта W . Тогда существует кватернионный подгифт U в W (кватернионной) размерности хотя бы 4 такой, что $\text{ТКК}(U)$ проста и существует некоторая полупростая группа H такая, что

$$[H_1 \cap H_2, H_1 \cap H_2]^\circ = \text{Aut}(U) \cdot H.$$

Здесь $\text{ТКК}(U)$ обозначает конструкцию Титса-Кантора-Кёхера

Лемма 2. Пусть H_1 и H_2 — централизаторы двух коммутирующих микровесовых подгрупп типа A_1 в G . Тогда $H_1 \cap H_2$ имеет тип $D_4 + A_1$.

Лемма 3. Для любой простой ССТА A размерности хотя бы 8 существует простая подалгебра $M \leq A$ над \bar{F} такая, что $\dim M = 8$.

Лемма 4. Пусть V — 32-мерная ССТА над алгебраически замкнутым полем F такая, что $\text{TKK}(V)$ имеет тип E_7 . Тогда для любых простых $M_1, M_2 \leq A$ таких, что $\dim M_1 = \dim M_2 = 8$ существует $g \in \text{TKK}(V)$ такой, что $\text{TKK}(M_1) = g^{-1} \text{TKK}(M_2)g$.

Используя эти результаты, нами была сформулирована и доказана основная теорема, описывающая геометрию симметрического пространства типа EVI. В качестве как точек, так и прямых для EVI мы возьмем элементы $\mathcal{S}(G)(F)$. Будем говорить, что точка **инцидентна** прямой, если соответствующие подгруппы $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$ коммутируют поточечно над \bar{F} . Тогда основной исследуемый вопрос сводится к тому, чтобы описать множество прямых, которые проходят через две точки в симметрическом пространстве EVI над F .

Теорема 5. Пусть A и B — две точки в $\mathcal{S}(G)$ для анизотропной группы G типа E_7 над базовым полем F характеристики нуль. Тогда существует симметрическое пространство C над F из следующего списка:

1. $D_6/D_4 + 2A_1$ (в случае $A = B$),
2. $D_4/4A_1 \amalg \text{pt}$ (в случае коммутирования A и B),
3. $\text{pt} \amalg \text{pt} \amalg \text{pt}$ (в общем положении),
4. $B_3/3A_1 \amalg \text{pt}$,
5. $A_3/A_2 \cdot \mathbb{G}_m \amalg \text{pt}$,
6. $B_2/2A_1 \amalg \text{pt}$,
7. $A_5/A_3 + A_1$,
8. $C_3/C_2 + A_1$,

и существует некоторая скрученная форма C' пространства C такая, что выполнено следующее равенство:

$$\{L - \text{прямая} \mid L \text{ проходит через } A \text{ и } B\} = C'(F).$$

2. Опубликованные и поданные в печать работы

В 2022 году мною были написаны представленные ниже работы, в каждой из которых есть благодарность гранту «Молодая математика России»:

[1] Viktor A. Petrov, Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EIII*, принята к публикации в журнал «Алгебра и анализ».

[2] Viktor A. Petrov, Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EVI*, послан в журнал Journal of Algebra, препринт <https://arxiv.org/abs/2208.13730>.

Также были опубликованы и приняты в журналы следующие написанные в прошлом году статьи (в каждом из которых есть благодарность гранту «Молодая математика России»):

[3] Andrei V. Semenov, Pavel Gvozdevsky, *Twisted forms of commutative monoid structures on affine spaces*, Journal of Algebra, Vol 608 (2022), pp. 272-289.

[4] Andrei V. Semenov, *BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. Case of the small parameter*, принята к публикации в Зап. Научн. Семинаров ПОМИ.

3. Участие в конференциях и школах

В 2022 году я участвовал в следующих конференциях и школах:

1. Июль 2022: конференция «Algebraic groups: the White Nights season II», Санкт-Петербург. Доклад «Twisted forms of commutative monoid structures on affine spaces».
2. Октябрь 2022: конференция «Analysis Days in Sirius», Сочи. Доклад «HRT-hypothesis and C^* -algebras».

4. Работа в научных центрах и международных группах

С 2019 года я работаю инженером-исследователем междисциплинарной лаборатории им. П. Л. Чебышёва при СПбГУ. С прошлого года я так же работаю в Международном Математическом Центре им. Эйлера.

5. Педагогическая деятельность

В течение года я осуществлял научное и педагогическое руководство над проектом Денисовой Александры, ученицы 11 класса ГБОУ СОШ 10 (город Санкт-Петербург). В проекте исследовались различные алгебры Йонеды для одной серии специальных диэдральных алгебр. Соответствующую работу планируется представить на Балтийский Научно-Инженерный конкурс и на конкурс научных работ КНВШ при Правительстве Санкт-Петербурга.