Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту “Молодая математика России”

Р. В. Бессонов

Результаты, полученные в 2022г. Завершены работы по теории рассеяния для операторов Дирака, струны Крейна и общих канонических систем, начатые в 2021г. В частности, на общий класс канонических гамильтоновых систем распространены результаты, полученные ранее для оператора Дирака с нулевым магнитным или с нулевым электрическим потенциалом. Доказано, что для этих систем (являющихся классической моделью произвольного самосопряженного дифференциального оператора с простым спектром) волновые операторы существуют и полны тогда и только тогда, когда главная спектральная мера оператора принадлежит классу Сеге на вещественной прямой. Существенно более простой вариант этого утверждения для CMV-матриц/ортогональных многочленов на единичной окружности принадлежит Б.Саймону (2009), причем простота доказательства достигается за счет развитой теории Сеге в дискретном случае.

В ходе доказательства непрерывного варианта использован динамический подход, который позволяет переформулировать задачу в терминах распространения бегущих волн на неоднородной струне. На языке физических параметров (плотность струны, ее длина, скорость распространения волны, вызванной точечным возмущением в левом конце) получено полное описание струн, для которых имеет место “устойчивое распространение фронта волны” - с увеличением времени норма решения в окрестности распространяющегося фронта волны не стремится к нулю. В частности, показано, что этот эффект не зависит от выбора профиля струны в начальный момент времени, при условии что тот имеет компактный носитель. Доказано, что устойчивое распространение фронта волны имеет место тогда и только тогда, когда главная спектральная мера оператора струны попадает в класс Сеге на положительной полуоси.

В терминах распространяющихся волн дан критерий наличия непрерывного сингулярного спектра оператора канонической системы/оператора струны. Результаты по теории рассеяния для канонических систем позволили также полностью описать операторы Дирака с потенциалами Вигнера-фон Неймана, для которых существуют полные волновые операторы прошлого и будущего (а значит, и оператор рассеяния). Потенциалы Вигнера - фон Неймана имеют вид $\sin(x^a)/x^b$ для вещественных параметров a, b. В зависимости от выбора параметров, потенциалы имеют различное поведение: периодическое, монотонное, осциллирующие и др. На спектральной стороне различные режимы позволяют моделировать различные спектральные свойства. Были описаны пары (a, b), для которых соответсвующие операторы Дирака имеют спектральную меру в классе Сеге, что равносильно существованию полных волновых операторов.

Второе направление работы касалось приложения непрерывного варианта теории Сеге к нелинейному уравнению Шредингера (NLS). В совместной статье с С.А.Денисовым доказано, что для L^2-решений NLS нормы решения в классах Соболева H^s с отрицательным показателем $s = -1$ являются величиной, эквивалентной интегралу движения с константами, зависящими лишь от размера L^2-нормы начальных данных. Это позволяет усилить для таких решений предыдущие результаты М.Криста, Дж. Коллиандера и Т.Тао (H^s норма решения может вырасти в ε^{-1} раз за промежуток времени $[0, \varepsilon]$, если $s \leqslant -1/2$), а также Г.Коха и Д.Татару (H^s норма решения равномерно ограничена по времени при $s > -1/2$) о критическом показателе $s = -1/2$. Для решений с начальными данным из класса L^2 удается показать, что H^s-норма решения равномерно ограничена по времени при $s \geqslant -1$. Доказательство этого факта опирается на формулу, связывающую коэффициент матрицы рассеяния оператора Дирака и определитель веса абсолютно непрерывной части его главной спектральной меры. С учетом этой формулы аналитическое продолжение коэффициента матрицы рассеяния в верхнюю полуплоскость оказывается связанным с логарифмическим интегралом спектральной меры - главным объектом теории Сеге. Таким образом, полученные ранее результаты по непрерывной версии теории Сеге получают новую трактовку в терминах нелинейного уравнения Шредингера.

Опубликованные и поданные в печать работы. Работы, поданные в печать:

- R. Bessonov, S. Denisov, Szego condition, scattering, and vibration of Krein strings, arXiv:2203.07132, submitted
- R. Bessonov, S. Denisov, Sobolev norms of L^2-solutions to NLS, arXiv:2211.07051, submitted

Участие в конференциях и школах. Доклады на конференциях:

- Р. В. Бессонов, Осцилляционные свойства решений нелинейного уравнения Шредингера, Вторая конференция Математических центров России. Секция "Комплексный анализ" 7–11 ноября 2022г., Москва, Россия (очно).
  https://mathcenter.ru/conf-mathcenters-2
- R. V. Bessonov, Szego measures and vibration of Krein strings, Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям, 19–23 сентября 2022 г., г. Цахкадзор, Армения (очно)
  https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?confid=2097
- R. V. Bessonov, Szego measures and vibration of Krein strings, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, July 3-8, 2022 JKU Linz, Austria (дистанционно)
  https://www.jku.at/institut-fuer-analysis/konferenzen/complex-analysis-spectral-theory-and-approximation-meet-in-linz/
- R. V. Bessonov, An inequality for Sobolev space $H^{-1}(\mathbb{R})$ and its application to NLS, 6-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, 20 – 22 декабря 2022г., Санкт-Петербург, Россия (очно)
  https://indico.eimi.ru/event/95/

Работа в научных центрах и международных группах. Не проводилась.

Педагогическая деятельность. *Научное руководство.* В 2022г. под моим руководством защищена выпускная квалификационная работа бакалавра (Г.Архипов, "Новое доказательство теоремы Денисова"), и выпускная квалификационная работа магистра (П. Губкин, "Dirac operators with exponentially decaying entropy"). В этом же году П.Губкин поступил в аспирантуру ПОМИ РАН, где продолжил научную деятельность под моим руководством. Г.Архипов поступил на программу магистратуры МКН СПбГУ "Современная математика", я остаюсь его научным руководителем в магистратуре.

Преподавание. Весной 2022г. я вел практические занятия по дисциплинам "Математический анализ, 2й семестр" (3 ак.ч. в неделю), "Вариационное исчисление" (0.5 ак.ч. в неделю). Осенью 2022г. я вел практические занятия по дисциплине "Математический анализ, 3й семестр" (2 ак.ч. в неделю), а также лекции по дисциплине "Математический анализ, 3й семестр" (1.5 ак.ч. в неделю). Занятия проводились на факультете Математики и компьютерных наук СПбГУ.

Научно-популярные лекции. Лекция в рамках Летней практики МКН СПбГУ 2022 для школьников, "Принцип максимума Понтрягина". Курс лекций "Сходимость рядов и равномерно распределенные последовательности" в рамках январской математической смены в Сириусе, 2022.