Отчёт по конкурсу «Молодая математика России»

Рябичев Андрей Дмитриевич

h-принцип и глобальная теория особенностей

1 Полученные результаты

Пусть даны многообразия M и N размерностей m и n соответственно. Мы решаем задачу: *когда в заданном гомотопическом классе отображений $M \to N$ найдётся отображение, имеющее заданные особенности?*

Более точно, для замкнутого подмножества $S \subset M$, открытого покрытия $S \subset \bigcup U_i$ и набора n-мерных многообразий V_i мы предполагаем заданным набор отображений $\varphi_i : U_i \to V_i$, попарно локально L-эквивалентных в каждой точке на пересечении их областей определения и таких что множество их критических точек есть в точности S. Для набора $\{\varphi_i\}$ мы бы хотели найти отображение $M \to N$, локально L-эквивалентное каждому φ_i в каждой точке $x \in U_i$.

Предположим, $m = n$, многообразие M связно и замкнуто, $S \neq \varnothing$ и особенности $\{\varphi_i\}$ являются бордмановскими (см., например, [1] и [5]). Тогда наша задача сводится к вопросу об изоморфизме расслоений (которая, в свою очередь, может быть сведена к вычислению характеристических классов, см. [3]). А именно, в работе [4] (пока так и не принятой в журнал) по набору ростков особенностей $\{\varphi_i\}$ я построил расслоение $T^{\{\varphi_i\}}M$ и доказал следующую теорему:

Теорема 1. *Отображение $f : M \to N$ гомотопно отображению с заданными бордмановскими особенностями в S, которые локально L-эквивалентны $\{\varphi_i\}$, если и только если расслоения $T^{\{\varphi_i\}}M$ и f^*TN изоморфны.*

Расслоение $T^{\{\varphi_i\}}M$ получается из TM некоторой переклейкой. Недостатком конструкции [4] является то, что для построения расслоения требуется задать ростки $\{\varphi_i\}$ в каждой точке. Эта информация явно является избыточной, и ожидаемо, что для построения расслоения $T^{\{\varphi_i\}}M$ достаточно знать ростки $\{\varphi_i\}$ лишь с точностью до топологической L-эквивалентности [2] — но пока это удаётся лишь "сделать вручную" на примерах в размерностях 2 и 3. В каких терминах схема переклейки может быть описана в общем случае, остаётся неясным.

Другое направление обобщений теоремы 1 — разные размерности многообразий M и N. Оказывается, при $m < n$ некоторый её аналог, похожий на теорему Смейла-Хирша (см., например, [6]) может быть верен. Явно построить расслоение $T^{\{\varphi_i\}}M$ в этом случае пока удаётся лишь когда ростки $\{\varphi_i\}$ имеют особенности типа Σ^1. Это позволяет легко доказывать утверждения такого сорта:

Предложение 1. *Любое непрерывное отображение из любого замкнутого связного двумерного многообразия M в любое трёхмерное многообразие N гомотопно погружению с любым наперёд заданным чётным числом особенностей Σ^1.*

Особенность Σ^1 в данном случае известна попросту как *зонтик Уитни* (см., например, [5]). Искомое погружение можно выбрать сколь угодно C^0-близким к исходному непрерывному отображению. Пример из предложения 1 может не быть широко известным в такой общности, но вряд ли интересен сам по себе.

Естественное каноническое описание переклеек, позволяющих определить $T^{\{\varphi_i\}}M$ при $m < n$, к сожалению, всё ещё неясно, поэтому построить это расслоение и вычислить его характеристические классы для более сложных особенностей пока не удаётся.

2 Опубликованные работы

Основная статья по теме проекта была снова отредактирована и подана в другой журнал

- A. Ryabichev. Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom-Boardman singularities

Также я написал и отправил в журналы пару небольших статей, не относящихся прямо к проекту, но затрагивающих сюжет из маломерной топологии, активно использованный в предыдущей статье [3]

- A. Ryabichev. Maximal degree of a map of surfaces
- A. Ryabichev. Short proof of the Kneser-Edmonds theorem on the degree of a map between closed surfaces

Наконец, я написал пару научно-популярных статей на русском языке, одна из которых также косвенно связана с темой проекта

- А. Рябичев. Погружения многообразий. // Константиновский сборник (Приложение к журналу Математическое образование), 8 (2023), 46–59.
- А. Рябичев, К. Щербаков. Корни многочленов и касательные к окружностям

3 Доклады на конференциях и семинарах

- 10-я Международная молодежная летняя школа-конференция по геометрическим методам математической физики, Красновидово.

  Доклад “Представимость функтора когомологий с локальными коэффициентами”

- Семинар по геометрической топологии, МИАН/Матфак ВШЭ.

  Доклад “Максимальная степень отображения между поверхностями”

  Вторая часть “Свойства геометрической степени и отображения между поверхностями”

- Постниковский семинар, МГУ.

  Доклад “Отображения с заданными бордмановскими особенностями”

- Студенческий семинар по маломерной топологии, СПбГУ/ММИ им. Леонарда Эйлера.

  Доклад “Отображения с заданными бордмановскими особенностями – 7”

  Вторая часть “Отображения с заданными бордмановскими особенностями – 14”

4 Педагогическая деятельность

За прошедший год я прочитал один спецкурс и два основных курса в НМУ, курс на ЛШСМ, а также поучаствовал в организации нескольких научно-популярных мероприятий топологической тематики. Полный список:

- *Топология трёхмерных многообразий.*

  Спецкурс в НМУ, весна 2023.

- *Топология – 1.*

  Основной курс в НМУ, весна 2023.

- *Топология – 2.*

  Основной курс в НМУ, осень 2023.

- *Разбиения многообразий на ручки. В сторону теоремы об h-кобордизме.*

  Курс на Летней школе «Современная математика», июль 2023, Дубна.

- Два доклада на серии научно-популярных конференций *Dark geometry fest* по геометрическим методам и приложениям.

- Мини-конференция *“Топология, комбинаторика и анализ данных”* в Воронеже.

  (организатор, докладчик) 15–17 ноября 2023, ВГУ.

  `https://sites.google.com/view/voronezh-top/`

- *Геометрические прогулки.*

  Серия из 6 популярных лекций на свежем воздухе, затрагивающих различные сюжеты из дифференциальной топологии (h-принцип для погружений и для изометрических вложений, форма пересечений на многообразии, разложение на ручки, накрытия и разветвлённые накрытия), апрель–октябрь 2023, Москва.

Также я работаю в московской школе №179 — являюсь там куратором двух 10 математических классов и составляю в них задания для матпрактикума, руковожу исследовательским проектом в области топологии, а также веду школьный научный семинар «Кружочек».

Научное руководство

В 2022-23 учебном году я был научным руководителем Фёдора Дьяконова (1 курс матфака ВШЭ), тема “Гомологии трёхмерных многообразий”, посвящена построению гомологической сферы, с применением компьютерных вычислений.

В 2023-24 учебном году я стал руководителем Тагира Юсупова (1 курс матфака ВШЭ), тема “Группа классов отображений”, ожидается построение копредставления для группы классов отображений неориентируемой поверхности.

Список литературы

[1] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps. IHES Publ. Math., 33 (1967), 21–57.

[2] C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A. A. du Plessis, E. J. N. Looijenga, Topological Stability of Smooth Mappings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552, 1976.

[3] A. Ryabichev, Eliashberg's h-principle and generic maps of surfaces with prescribed singular locus. Topology and its Applications, vol. 276 (2020). DOI: 10.1016/j.topol.2020.107168

[4] A. Ryabichev, Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom-Boardman singularities. arXiv:1810.10990

[5] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, Том 1, Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.

[6] Н. М. Мишачёв, Я. М. Элиашберг, Введение в h-принцип. М.: МЦНМО, 2004.