“Молодая математика России”
Отчет за 2023 год

Андрей Солдатенков

Результаты, полученные в этом году

В этом году основным направлением моих исследований было изучение когомологий компактных гиперкэлеровых многообразий. Основные результаты появились в препринте [1], также в ближайшее время будет опубликован препринт [2].

В [1] мы изучаем жесткие потоки и их классы когомологий на компактных гиперкэлеровых многообразиях. Мы также вводим понятие параболического пространства Тейхмюллера для таких многообразий и изучаем действие группы классов отображений (то есть группы диффеоморфизмов по модулю диффеоморфизмов, изотопных тождественному) на этом пространстве. Результаты работы [1] технически сложны, поэтому мы постараемся описать идеи этой работы, не вдаваясь в детали.

Напомним, что гиперкэлерово многообразие — это дифференцируемое многообразие с тройкой комплексных структур, удовлетворяющих кватернионным соотношениям, и римановой метрикой, которая является кэлеровой относительно данных комплексных структур. Мы будем рассматривать только односвязные компактные гиперкэлеровы многообразия. Кромо того, будем предполагать, что представление голономии гиперкэлеровой метрики неприводимо. Многообразия данного типа особенно интересны с точки зрения алгебраической геометрии, и известны также как неприводимые голоморфно-симплектические многообразия.

В работе [1] мы изучаем потоки де Рама на гиперкэлеровых многообразиях. Напомним, что поток де Рама — это элемент пространства (топологически) двойственного пространству гладких дифференциальных форм на данном многообразии. Про потоки можно думать как про дифференциальные формы, коэффициенты которых являются обобщенными функциями. Особый интерес с точки зрения голоморфной динамики и геометрической теории меры представляют положительных потоки, то есть потоки, принимающие неотрицательные значения на положительных формах. Примерами положительных потоков являются положительные гладкие дифференциальные формы, а также потоки интегрирования вдоль замкнутых комплексных подмногообразий. При этом структура произвольного положительного потока может быть гораздо более сложной.

На потоках, как и на гладких дифференциальных формах, определен дифференциал де Рама, и когомологии соответствующего комплекса изоморфны сингулярным когомологиям многообразия. В простнанстве замкнутых потоков фиксированной степени рассмотрим замкнутый конус положительных потоков. Структура этого конуса несет в себе важную информацию о геометрии нашего многообразия. Нас будут интересовать замкнутые положительные потоки бистепени $(1,1)$, образ которых при проекции в пространство когомологий образует замкнутый конус псевдоэффективных классов когомологий.

Особый интерес представляют классы когомологий, представимые единственным замкнутым положительным потоком. Такие классы (а также потоки, их представляющие) мы называем жесткими. Примером жесткого потока является поток интегрирования вдоль кривой с отрицательным самопересечением на комплексной поверхности.

Как показал Серж Канта, жесткие потоки играют важную роль при изучении динамических свойств автоморфизмов комплексных K3 поверхностей. Канта показал, что под действием степеней гиперболического автоморфизма на фиксированную кэлерову метрику получается последовательность дифференциальных форм, которая (после нормировки) имеет в слабом пределе жесткий положительный замкнутый поток. Такие потоки мы называем динамическими. В работе [1] мы развиваем данный круг идей, и строим обширный класс жестких потоков на произвольном гиперкэлеровом многообразии (с достаточно большим вторым числом Бетти). Ниже дана формулировка одного из наших результатов. Напомним, что на вторых когомологиях произвольного гиперкэлерового многообразия (в смысле определения данного выше) существует каноническая квадратичная форма Бовиля–Богомолова, обобщающая форму пересечения на когомологиях K3 поверхностей.

Теорема 1. *Пусть X — компактное гиперкэлерово многообразие, у которого $b_2 \geqslant 7$. Рассмотрим параболический класс когомологий $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$, то есть вещественный класс вторых когомологий ходжева типа $(1,1)$, который лежит в замыкании кэлерова конуса и является изотропным для формы Бовиля–Богомолова на X. Если ортогональное дополнение к α относительно формы Бовиля–Богомолова в пространстве $H^2(X,\mathbb{R})$ не содержит ненулевых элементов из $H^2(X,\mathbb{Q})$, то класс α является жестким.*

В работе [2] мы изучаем структуру кэлерова конуса и обильного конуса произвольного гиперкэлерова многообразия. Рассмотрим пространство когомологий бистепени $(1,1)$ с вещественными коэффициентами. Ограничение формы Бовиля–Богомолова на это пространство имеет сигнатуру $(1, b_2 - 3)$, а проективизация положительного конуса относительно этой формы является гиперболическим пространством. Замечательным свойством гиперкэлеровых многообразий является то, что их кэлеров конус и обильный конус могут быть эффективно описаны в терминах геометрии данного гиперболического пространства. А именно, существует набор целочисленных классов когомологий с отрицательными квадратами, называемых MBM-классами (в случае K3 поверхностей это классы с квадратом -2), ортогональные дополнения к которым разбивают гиперболическое пространство на открытые камеры. При этом кэлеров конус нашего многообразия является одной из камер, а обильный конус является пересечением кэлерового конуса с подпространством, порожденным группой Нерона–Севери (то есть первыми классами Черна голоморфных линейных расслоений). Геометрия данных конусов может быть достаточно сложна. Она в существенной степени определяется структурой предельных точек данных конусов на абсолюте гиперболического пространства.

Известная теорема Ковача утверждает, что для проективной K3 поверхности с числом Пикара как минимум 3 предельное множество обильного конуса на абсолюте либо совпадает с абсолютом (и в этом случае обильный конус совпадает с положительным конусом), либо нигде не плотно в абсолюте. Эту теорему можно обобщить на произвольные гиперкэлеровы многообразия. В работе [2] мы развиваем этот круг идей и изучаем более тонкие свойства предельного множества обильного конуса. Мы задаемся вопросом о том, может ли предельное множество содержать росток аналитического подмногообразия абсолюта, и если да, то что можно сказать про предельное множество в таком случае. Ответ на первый вопрос является положительным, и это приводит нас к изучению конфигураций шаров на границе гиперболического пространства, похожих на классическую аполлониеву упаковку шаров. Мы доказываем ряд свойств предельного множества и показываем, что аполлониевы упаковки шаров могут возникать в предельном множестве обильного конуса произвольного гиперкэлерова многообразия (с достаточно большим вторым числом Бетти).

Опубликованные и поданные в печать работы

[1] N. Sibony, A. Soldatenkov, M. Verbitsky *Rigid currents on compact hyperkahler manifolds*, arXiv:2303.11362

[2] E. Amerik, A. Soldatenkov, M. Verbitsky *Apollonian carpet and the boundary of the Kähler cone of a hyperkähler manifold*, in preparation

Участие в конференциях и школах

(1) Workshop on Conservative Dynamics and Symplectic Geometry, IMPA, Rio de Janeiro, August 14–18

(2) GADEPs focused conference III: Noether-Lefschetz and Hodge loci, IMPA, Rio de Janeiro, August 21–25

(3) The 8th Iberoamerican Congress on Geometry, the Universidad de La Frontera, Pucón, Chile

Работа в научных центрах и международных группах

В 2023 году я работал в иституте чистой и прикладной математики (IMPA), г. Рио-де-Жанейро, Бразилия

Педагогическая деятельность

В весеннем семестре 2023 читал курс лекций “Введение в пространства модулей пучков на K3 поверхностях” в IMPA. Программа курса:

(1) Общее введение, понятие (полу-)стабильности для когерентных пучков, существование грубого пространства модулей

(2) Пучки на проективных поверхностях, их дискретные инварианты и пространства модулей. Случай поверхностей с тривиальным каноническим расслоением. Примеры пространств модулей.

(3) Симплектическая структура на пространствах модулей пучков на K3 поверхностях

(4) Локальная структура и особенности пространств модулей, краткое обсуждение примеров О’Грэйди

(5) Многообразия Калаби-Яу, возникающие как пространства модулей пучков на поверхностях Энриквеса