# Отчёт по гранту конкурса "Молодая математика России" за 2022 г.

В.Жуков [*]

29 декабря 2022 г.

## Исследования

В соответствии со своей заявкой я занимался исследованием связи между инвариантами дельта-матроидов и кластерными алгебрами. Некоторые инварианты графов допускают естественное распространение на вложенные графы. В первую очередь, нас интересуют инварианты графов, связанные с инвариантами узлов и происходящие из весовых систем на хордовых диаграммах. В этом случае инварианты вложенных графов представляют собой весовые системы, отвечающие инвариантам зацеплений. Эффективные способы распространения инвариантов графов на вложенные графы основываются на использовании структур алгебр Хопфа на различных пространствах — графов, хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, и дельта-матроидов; последние являются комбинаторными структурами, заменяющими, в случае вложенных графов, графы пересечений хордовых диаграмм.

С другой стороны, теория кластерных алгебр изучает объекты, очень близкие к упомянутым ранее. Речь идет о колчанах (ориентированных графах), триангуляциях двумерных ориентированных поверхностей с метрикой постоянной отрицательной кривизны, задающих кластерные системы координат на пространствах модулей кривых, электрических цепях специального вида. Одним из основных инструментов этой теории является мутация — операция преобразования колчана или флип триангуляции. Основное направление моих занятий — установление связи между двумя теориями. Обнаружение такой связи могло бы позволить определить мутации для произвольных вложенных графов, не только триангуляций, и, более общо, для произвольных дельта-матроидов. В обратном направлении, эта

[*]Национальный Исследовательский университет Высшая школа экономики, email: slava.zhukov@list.ru

связь могла бы привести к новым методам построения инвариантов вложенных графов и дельта-матроидов и, как следствия, новым инвариантам зацеплений.

Назовём матрицу $A$ на множестве индексов $V$ *квазисимметрической*, если существует функция $\epsilon : V \to \{-1, +1\}$ такая, что для любых $u, v \in V$ выполняется равенство $\epsilon(u)A_{uv} = \epsilon(v)A_{vu}$.

Следуя статье [3], рассмотрим следующую конструкцию. Возьмем произвольную косо-симметрическую или квази-симметрическую матрицу $A$ и рассмотрим систему множеств, где базовым множеством является множество $V$ индексов матрицы $A$, а допустимыми являются подмножества $U$, такие, что подматрица $A_{|U}$ имеет невырожденный опрделитель. В статье [3] доказано, что такая система множеств является $\Delta$-матроидом над любым полем.

В статье [5] вложенному графу сопоставляется лагранжево подпространство в симплектическом пространстве (с коэфициентами из $\mathbb{F}_2$) с выбранным базисом. На таких подпространствах вводятся движения Васильева и операция, локального дополнения соответствующие движениям Васильева и операции локального дополнения на вложенных графах.

Беря в качестве вложенного графа граф с одной вершиной (хордовую диаграмму), мы можем построить лагранжево подпространство следующим образом. Рассмотрим матрицу $2n \times n$ вида $EA$, где $E$ единичная матрица, а $A$ симметрическая матрица с коэффициентами из $\mathbb{F}_2$, являющаяся матрицей смежности графа пересечений выбранной хордовой диаграммы. Тогда рассматриваемое в статье [5] лагранжево подпространство можно понимать как подпространство, натянутое на вектора $< f_i >$, соответсвующие строкам построенной матрицы.

В статье [6] построенно взаимнооднозначное соответствие между лагранжевыми подпространствами для таких вложенных графов и $\Delta$-матроидами, построенными по вложенным графам стандартным образом.

Я предпринял попытку обобщить конструкцию из статьи [5] для поля характеристики 0. Такое обобщение позволило бы связать дельта-матроиды со структурой кластерной алгебры на (положительном) лагранжевом грассманиане.

Другое направление моих исследований связано с предложенным М. Э. Казаряном и реализованным Zhuoke Yang'ом новым подходом к весовым системам, которые строятся по алгебрам Ли. Этот подход состоит в том, чтобы продолжить весовые системы с хордовых диаграмм (интерпретируемых как инволюции без неподвижных точек) на произвольные перестановки. В этом случае перестановки интерпретируются как гиперкарты с одной вершиной. Я предложил обобщение понятия 4-членного отношения на гиперкарты из статьи [1] и разработал конструкцию весовой системы на гиперкартах по весовым системам на вложенных графах. Также я построил пример весовой системы на гиперкартах, не получающейся таким образом.

## Педогагическая деятельность

1. Преподаю математический анализ в качестве учебного ассистента на первом курсе факультета математики НИУ ВШЭ.

2. Преподаю специальную математику в 179-ой школе.

## Школы, конференции

1. Участвовал в работе студенческой школы “Края особенностей” (7–11 декабря 2022, г.Москва, научный центр "Вороново"НИУ ВШЭ)

## Работа в научных центрах и международных группах

1. Стажер-исследователь Международной Лаборатории кластерной геометрии факультета математики НИУ ВШЭ.

## Публикации

Статья в соавторстве с Александром Дунайкиным:
Vyacheslav Zhukov, Alexander Dunaykin. Transition polynomial as a weight system for binary delta-matroids //*Moscow Mathematical Journal.* 2022. Vol. 22. No. 1. P. 69-81. doi

## Список литературы


[1] S. Chmutov & F. Vignes-Tourneret. Partial duality of hypermaps

[2] Iain Moffatt. Delta-matroids for graph theorists

[3] A. Bouchet. Representability of $\Delta$-matroids

[4] Kelli Talaska. A formula for Plücker coordinates associated with a planar network

[5] V. Kleptsyn, E. Smirnov Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 25, No. .12 (2016) 1642006

[6] V.I. Zhukov. Lagrangian subspaces, delta-matroids and four-term relations