

Отчёт по гранту конкурса
"Молодая математика России"
за 2023 г.

В.Жуков *

15 декабря 2023 г.

Исследования

В соответствии со своей заявкой я занимался исследованием связи между инвариантами дельта-матроидов и кластерными алгебрами. Некоторые инварианты графов допускают естественное распространение на вложенные графы. В первую очередь, нас интересуют инварианты графов, связанные с инвариантами узлов и происходящие из весовых систем на хордовых диаграммах. В этом случае инварианты вложенных графов представляют собой весовые системы, отвечающие инвариантам зацеплений. Эффективные способы распространения инвариантов графов на вложенные графы основываются на использовании структур алгебр Хопфа на различных пространствах — графов, хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, и дельта-матроидов; последние являются комбинаторными структурами, заменяющими, в случае вложенных графов, графы пересечений хордовых диаграмм.

С другой стороны, теория кластерных алгебр изучает объекты, очень близкие к упомянутым ранее. Речь идет о колчанах (ориентированных графах), триангуляциях двумерных ориентированных поверхностей с метрикой постоянной отрицательной кривизны, задающих кластерные системы координат на пространствах модулей кривых, электрических цепях специального вида. Одним из основных инструментов этой теории является мутация — операция преобразования колчана или флип триангуляции. Основное направление моих занятий — установление связи между двумя теориями. Обнаружение такой связи могло бы позволить определить мутации для произвольных вложенных графов, не только триангуляций, и, более общо, для произвольных дельта-матроидов. В обратном направлении, эта

*Национальный Исследовательский университет Высшая школа экономики, email: slava.zhukov@list.ru

связь могла бы привести к новым методам построения инвариантов вложенных графов и дельта-матроидов и, как следствия, новым инвариантам зацеплений.

Назовём матрицу A на множестве индексов V *квазисимметрической*, если существует функция $\epsilon : V \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что для любых $u, v \in V$ выполняется равенство $\epsilon(u)A_{uv} = \epsilon(v)A_{vu}$.

Следуя статье [3], рассмотрим следующую конструкцию. Возьмем произвольную косо-симметрическую или квази-симметрическую матрицу A и рассмотрим систему множеств, где базовым множеством является множество V индексов матрицы A , а допустимыми являются подмножества U , такие, что подматрица $A|_U$ имеет невырожденный определитель. В статье [3] доказано, что такая система множеств является Δ -матроидом над любым полем.

В статье [5] вложенному графу сопоставляется лагранжево подпространство в симплектическом пространстве (с коэффициентами из \mathbb{F}_2) с выбранным базисом. На таких подпространствах вводятся движения Васильева и операция, локального дополнения соответствующие движениям Васильева и операции локального дополнения на вложенных графах.

Беря в качестве вложенного графа граф с одной вершиной (хордовую диаграмму), мы можем построить лагранжево подпространство следующим образом. Рассмотрим матрицу $2n \times n$ вида EA , где E единичная матрица, а A симметрическая матрица с коэффициентами из \mathbb{F}_2 , являющаяся матрицей смежности графа пересечений выбранной хордовой диаграммы. Тогда рассматриваемое в статье [5] лагранжево подпространство можно понимать как подпространство, натянутое на вектора $\langle f_i \rangle$, соответствующие строкам построенной матрицы.

В статье [6] построено взаимнооднозначное соответствие между лагранжевыми подпространствами для таких вложенных графов и Δ -матроидами, построенными по вложенным графам стандартным образом.

Другое направление моих исследований связано с предложенным М. Э. Казаряном и реализованным Zhuoke Yang'ом новым подходом к весовым системам, которые строятся по алгебрам Ли. Этот подход состоит в том, чтобы продолжить весовые системы с хордовых диаграмм (интерпретируемых как инволюции без неподвижных точек) на произвольные перестановки. В этом случае перестановки интерпретируются как гиперкарты с одной вершиной. Я предложил обобщение понятия 4-членного отношения на гиперкарты из статьи [1] и разработал конструкцию весовой системы на гиперкартах по весовым системам на вложенных графах. Также я построил пример весовой системы на гиперкартах, не получающейся таким образом.

На пространстве перестановок упомянутом в предыдущем параграфе можно ввести структуру алгебры Хопфа (коумножение) по крайней мере двумя различными способами.

Исследовал поведения проекции на подпространство примитивных элементов различных весовых систем (таких как, хроматический полином Стенли, "Interlace polynomial" и др.) на этих алгебрах Хопфа.

Пользуясь определением двудольного бинарного Δ -матроида из статьи

[8] можно ввести 4-членные соотношения на пространстве двудольных бинарных Δ -матроидов, так чтобы при естественном отображении перестановок в двудольные бинарные Δ -матроиды соотношения предложенные М. Э. Казаряном и Zhuoke Yang'ом для вычисления gl весовой системы для перестановок переходили в такие 4-членные соотношения.

Исследовал свойства естественного отображения из алгебры Хопфа перестановок, в алгебру Хопфа двудольных бинарных Δ -матроидов.

Педагогическая деятельность

1. Был ассистентом первого курса топологии в НМУ.

Школы, конференции

1. Участвовал в работе студенческой школы “Инвариантность и интегрируемость” (29 октября – 3 ноября 2023 организуемой “Международной лабораторией кластерной геометрии НИУ ВШЭ”)

Работа в научных центрах и международных группах

1. Стажер-исследователь Международной Лаборатории кластерной геометрии факультета математики НИУ ВШЭ.

Список литературы

- [1] S. Chmutov & F. Vignes-Tourneret. Partial duality of hypermaps
- [2] Iain Moffatt. Delta-matroids for graph theorists
- [3] A. Bouchet. Representability of Δ -matroids
- [4] Kelli Talaska. A formula for Plücker coordinates associated with a planar network
- [5] V. Kleptsyn, E. Smirnov Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 25, No. .12 (2016) 1642006
- [6] V.I. Zhukov. Lagrangian subspaces, delta-matroids and four-term relations
- [7] M. Kazaryan, S. Lando, Weight systems and invariants of graphs and embedded graphs, Russian Mathematical Surveys, 2022, Vol. 77, Issue 5, Pages 893–942

- [8] Yan, Q., Jin, Xa. Eulerian and Bipartite Binary Delta-matroids. *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 38, 813–821 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10255-022-1014-7>