Теорема Е. И. Алексеевой

Приведём формулировку и доказательство основного результата работы [1] в редакции, предложенной рецензентом.

Теорема. [1] *Среди треугольников на плоскости Лобачевского с заданными длинами двух сторон AB и AC максимальную площадь имеет тот, у которого угол A равен сумме углов B и C.*

Доказательство. Обозначим через α, β, γ углы треугольника ABC. Воспользуемся моделью Пуанкаре в круге. Вершину A поместим в центр модели. Рассмотрим евклидову окружность ω и евклидову прямую, содержащие гиперболические прямые BC и AB соответственно. Они пересекаются в двух точках B и B' (рис. 2 в [1]).

Докажем, что *площадь гиперболического треугольника ABC равна удвоенной величине евклидова угла $AB'C$,* который мы обозначим через τ. Действительно, угол между хордой BC и окружностью ω также равен τ, так как угол между хордой и касательной равен вписанному углу. Так как сумма углов евклидова треугольника ABC равна $\alpha+\beta+\gamma+2\tau = \pi$, то $S(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\tau$.

Таким образом, треугольник ABC имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда угол $AB'C$ максимален. Поскольку длины сторон AB и AC фиксированы, а меняется лишь угол между ними, можно считать фиксированными точки A и B; тогда точка C может перемещаться по окружности ψ с центром A. Очевидно, что угол $AB'C$ максимален, если евклидова прямая $B'C$ касается окружности ψ (рис. 3 в [1]). Это, в свою очередь означает, что евклидов угол ACB' — прямой. Последнее условие равносильно тому, что $\pi/2 = \angle CAB' + \angle CB'A = \alpha + \tau$. Сопоставив это с выведенной ранее формулой $S(ABC) = 2\tau$ и формулой $S(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ для площади треугольника, получаем требуемое $\alpha = \beta + \gamma$. QED

[1] J. I. Alekseeva, Hyperbolic triangles of the maximum area with two fixed sides, J. I. Alekseeva http://arxiv.org/abs/0911.5319.