Отображения параметрических плоскостей треугольников

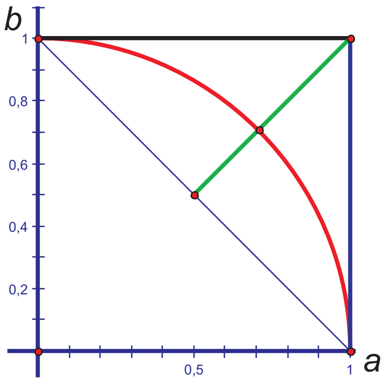
Сгибнев А.И.

В данной заметке предлагается непривычный для школьника взгляд на традиционный объект геометрии — треугольник. В результате возникает ряд интересных учебно-исследовательских задач, решаемых вполне школьными средствами.

Рассмотрим треугольник со сторонами x, y, z. Пусть z — бо̀льшая из сторон. Поделим все три стороны на z и получим величины, пропорциональные сторонам: $a, b, 1$, причём $a, b \leq 1$. Для простоты договоримся называть эти новые величины сторонами.

Введём координатную плоскость (a, b). Теперь каждому треугольнику соответствует точка на этой плоскости. Какую область покроют на плоскости (a, b) все треугольники? Во-первых, должно быть $a \leq 1$, $b \leq 1$. Во-вторых, в силу неравенства треугольника $a + b < 1$ (вырожденные треугольники рассматривать не будем).

Изобразим эту область:



Любой треугольник отображается в точку этой области. И, наоборот, любая точка области соответствует треугольнику.

Выделим среди всех треугольников равнобедренные. Нам годятся случаи $a = 1$ (синяя линия), $b = 1$ (чёрная линия), $a = b$ (зелёная линия). Общая точка этих трёх отрезков соответствует равностороннему треугольнику.

Как изобразить на плоскости (a, b) все прямоугольные треугольники? По теореме Пифагора для них $a^2 + b^2 = 1$. Отберём из них те точки, которые лежат внутри нашей области — это будет дуга окружности (красная линия). Эта дуга разделяет две области, соответствующие тупоугольным и остроугольным треугольникам. В самом деле, если мы хотим из остроугольного треугольника непрерывным изменением получить тупоугольный, мы обязательно "пройдём" через прямоугольный. В терминах плоскости (a, b) любая кривая, соединяющая точки из двух разных областей, должна пересечь дугу.

Нетрудно сообразить, что остроугольным треугольникам соответствует верхняя область — например, потому, что в ней находится равносторонний треугольник.

Упражнение 1. Как выглядит на плоскости (a, b) множество треугольников с заданным углом между сторонами a и b? Как связаны между собой точки, соответствующие осесимметричным друг другу треугольникам?

Теперь попробуем задавать треугольник другими параметрами. Для начала выберем сторону a и угол β между сторонами 1 и a.

Изучим, какие линии на плоскости (a, β) соответствуют равнобедренным треугольникам. Как обычно, есть три случая: $a = 1$, $b = 1$, $a = b$. С первым всё ясно, это правая граница нашей области.

Если $b = 1$, то напротив стороны a лежит угол $180° - 2\beta$. Поэтому, применяя теорему синусов для сторон a и 1, получим:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

После упрощения получим $a = 2\cos\beta$ (чёрная линия).

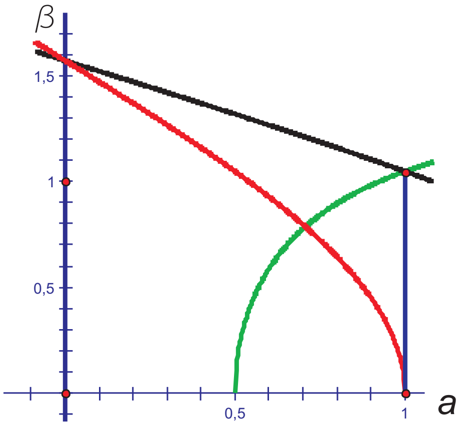
Упражнение 2. Докажите, что все треугольники отобразятся на область $\{a \le 2\cos\beta, 0 < \beta < 90^\circ\}$.

Наконец, в случае $a = b$ (зелёная линия) напротив стороны 1 лежит угол $180^\circ - 2\beta$, поэтому по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin(180^\circ - 2\beta)} \Rightarrow a = \frac{1}{2\cos\beta}.$$

Упражнение 3. Докажите, что линия прямоугольных треугольников имеет уравнение $a = \cos\beta$ (красная линия).

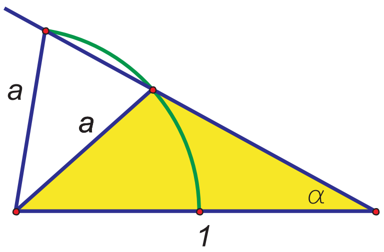
Изобразим все найденные линии на плоскости (a, β).



Упражнение 4. Объясните, почему линии $a = b$ соответствуют **не** все углы β от 0 до 90°. Тот же вопрос для линии $b = 1$.

Посмотрим на получившуюся картинку как на отображение плоскости (a, b) на плоскость (a, β). Интересно пронаблюдать, как деформировались линии, но сохранились соотношения между ними. Равносторонний треугольник по-прежнему лежит на пересечении трёх линий, соответствующих равнобедренным (проверьте, что точке пересечения соответствует угол $\beta = 60^\circ$). Линия $b = 1$ по-прежнему лежит по одну сторону от линии прямоугольных треугольников, а линия $a = b$ по-прежнему пересекает её.

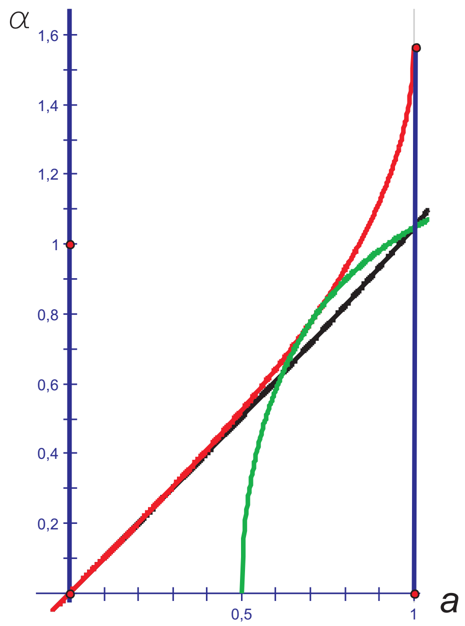
Теперь рассмотрим плоскость (a, α), где α — угол против стороны a. Новизна ситуации в том, что эти параметры, вообще говоря, задают не один, а два треугольника (см. рис.). Интересно посмотреть, как это скажется на отображении.



Сначала исследуем количество треугольников в зависимости от параметров. Из рисунка видно, что:

1) если $a < \sin\alpha$, то решений нет,
2) если $a = \sin\alpha$, то решение одно,
3) если $a > \sin\alpha$, то решений два.

Таким образом, каждой точке в прямоугольнике ниже красной линии соответствуют два треугольника — остроугольный и тупоугольный. А каждой точке на границе один — прямоугольный. Можно себе представить, что область "сложили" по линии прямоугольных треугольников.



Довольно любопытно выглядит множество равнобедренных треугольников.

Рассмотрим множество $a = b$. Для таких треугольников, аналогично предыдущей плоскости, имеем $a = \frac{1}{2\cos\alpha}$ (зелёная линия).

Упражнение 5. Докажите, что нижняя часть линии $a = b$ относится к тупоугольным треугольникам, а верхняя (после точки касания с границей) — к остроугольным. (Удобно представить себе, что эти части линии нарисованы на разных листах нашей перегнутой области.)

Теперь рассмотрим множество $b = 1$. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Упражнение 6. К какому виду треугольников (к какому листу) относится линия $b = 1$? Объясните возникновение новой точки пересечения линий $b = 1$ и $a = b$, которой не было на предыдущих плоскостях.

Задача 7. Изобразите область, которую займут треугольники на плоскости параметров (a, h_1) (сторона и высота к единичной стороне). Постройте кривые, соответствующие равнобедренным и прямоугольным треугольникам.

Задача 8. То же задание для плоскости параметров (m_1, m_2) (две меньшие медианы треугольника).

Читатель легко может продолжить серию задач, выбирая различные параметры для задания треугольника и изучая получившиеся картинки. В частности, интересно выяснять, как выглядят линии координат одних плоскостей в других плоскостях (множества $a = const$, $\alpha = const$ и т.д.). Интересно также продолжить изучать многолистные поверхности, соответствующие неоднозначному заданию треугольника выбранными параметрами.

Можно снять ограничения $a \leq 1, b \leq 1$ и посмотреть, как изменится картинка на плоскости (a, b). В каком-то смысле это было искусственное ограничение для того, чтобы облегчить первоначальную задачу. В этой связи интересно изучить плоскость, в которой параметры симметричны (не зависят от переименования сторон):

Задача 9. Рассмотрим множество треугольников, для которых радиус описанной окружности $R = 1$. Пусть r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника. Изобразите различные семейства треугольников на плоскости (r, p).

Для решения этой задачи пригодится формула Эйлера, связывающая r и R с расстоянием между центрами окружностей, а также теорема Понселе.

Отображения плоскостей параметров можно красиво реализовать на компьютере.