Разбиение множеств на части меньшего диаметра*

А.М. Райгородский

1 Определения и обозначения

Назовем *диаметром* множества Ω на плоскости величину

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Здесь

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2), \quad \mathbf{y}=(y_1,y_2),$$

т.е. это обычное "евклидово" расстояние между точками на плоскости. Значок "sup" — это значок "супремума" (точной верхней грани), и при желании можно считать, что речь идет просто о максимуме. По сути, диаметр множества — это максимум расстояний между его точками. Почему мы все-таки пишем не всем понятный супремум? А потому, что бывают множества, в которых обычный максимум расстояний не достигается. Например, возьмем круг без границы (удалим из круга ограничивающую его окружность). Впрочем, все это детали. Будем преполагать, что все наши множества "замкнуты" (содержат свою границу), и тогда надобность в супремуме отпадет.

Рассмотрим произвольное ограниченное множество Ω. Можно считать, что $\operatorname{diam}\Omega = 1$ (при необходимости сожмем или раздуем множество с помощью гомотетии). Хочется как можно экономнее разбить Ω на части строго меньшего диаметра. Иными словами, мы хотим представить Ω в виде

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f$$

с условием $\operatorname{diam}\Omega_i < \operatorname{diam}\Omega$ для каждого i. При этом f мы стремимся минимизировать. Можно представлять себе Ω как некий неправильной формы торт, который целиком к нам в рот не лезет, но который по жадности своей мы желаем съесть за наименьшее количество "укусов". Вот и нужно нам так разрезать торт на куски, чтобы этих кусков было мало и чтобы в рот они к нам все-таки лезли.

Основной вопрос: какой торт хуже всех с точки зрения описанной выше задачи о разрезании на куски? Иначе говоря, на сколько кусков мы заведомо любой торт разделим?

К. Борсук в 1933 году формализовал указанную задачу так: каково наименьшее число $f(2)$, такое, что любое ограниченное множество Ω на плоскости допускает разбиение на $f(2)$ частей меньшего диаметра? Разумеется, Борсук размышлял не в терминах скорейшего поедания "кривых" тортов, да и вообще, мотивировкой для него служила топологическая проблематика. Подробную и, кстати, весьма интригующую историю задачи можно найти в книге [1].

Еще вопрос: почему мы пишем $f(2)$? А дело в том, что плоскость у нас двумерная. На самом деле, Борсук ставил аналогичную задачу и на прямой (соответствующая величина — $f(1)$), и в пространстве любой размерности. Обычно пространство размерности n обозначают через $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ — это прямая, $\mathbb{R}^2$ — плоскость, $\mathbb{R}^3$ — пространство в стандартном школьном смысле, т.е. трехмерное простанство, в котором мы живем. В общем случае $f(n)$ — это *число Борсука*, равное такому наименьшему f, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на f частей меньшего диаметра, но существует ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, которое на $f-1$

*Этот проект является улучшенной версией проектов http://www.mccme.ru/mmks/dec09/raig.pdf, http://www.turgor.ru/lktg/2011/4/index.php.

частей меньшего диаметра не разбивается. При этом расстояния в $\mathbb{R}^n$ меряются стандартно ("по Евклиду"):

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n), \quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n).$$

Борсук предположил, что $f(n) = n+1$. Это предположение называется *гипотезой Борсука*. Гипотезу с треском опровергли в 1993 году (см. [1], [2]), но осталась куча вопросов, на которые по-прежнему нет ответов.

В следующих разделах мы приведем задачи проекта. Постепенно мы выйдем и на интересные нерешенные проблемы, в которых, однако, вполне возможны серьезные продвижения и на школьном уровне.

2 Задачи семинара

Задача 1. Докажите, что $f(1) = 2$.

Задача 2. Докажите, что $f(2) \geqslant 3$. Иными словами, приведите пример множества на плоскости, которое на две части меньшего диаметра не разбивается.

Задача 3. Разбейте квадрат на части меньшего диаметра.

Задача 4. Разбейте круг радиуса 1/2 на 3 части меньшего диаметра.

Задача 5. Разбейте круг радиуса 1/2 на 3 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866...$

Задача 6. Докажите, что константа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ из задачи 5 неулучшаема, т.е. при любом разбиении круга радиуса 1/2 на 3 части найдется часть, диаметр которой не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Назовем *универсальной покрышкой* в $\mathbb{R}^n$ такое множество Ω, что для любого множества Φ диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ существует движение пространства, переводящее Φ внутрь Ω. Иными словами, Φ можно так подвинуть, что Ω целиком его покроет. Например:

Задача 7. Докажите, что квадрат со стороной 1 является универсальной покрышкой на плоскости.

Задача 8. Докажите, что куб со стороной 1 является универсальной покрышкой в пространстве любой размерности. При этом n-мерным кубом со стороной 1 мы просто считаем множество точек $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, у которых $x_i \in [0,1]$ для каждого i.

Известно, что правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами является универсальной покрышкой. Подробное доказательство этого (не вполне тривиального) факта можно найти в книге [3]. Можете, однако, подумать над этим самостоятельно.

Задача 9. Разбейте правильный шестиугольник Ω_6 на 3 части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выведите отсюда справедливость гипотезы Борсука на плоскости, а также, в определенном смысле, "неулучшаемость" константы $\frac{\sqrt{3}}{2}$ из задачи 6.

Задача 10. Что играет роль неулучшаемой константы из задачи 9 в случае прямой?

Задача 11. Докажите, что в любом множестве из n точек на плоскости есть не более n пар точек, расстояние между которыми равно диаметру.

Задача 12. Выведите из задачи 11 справедливость гипотезы Борсука для *конечных* множеств точек на плоскости (не прибегая к помощи покрышек).

Задача 13*. Докажите, что круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ является универсальной покрышкой на плоскости.

Задача 14. Объясните, почему круг радиуса $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ не может быть универсальной покрышкой.

Задача 15. Объясните, почему результат задачи 13* не позволяет сходу доказать гипотезу Борсука на плоскости.

Задача 16. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — универсальная покрышка на плоскости.

Задача 17. С помощью результата задачи 16 докажите гипотезу Борсука.

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^n$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}\Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α.

Задача 18. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перепендикулярную этому отрезку, на расстоянии 1/2 от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника также служит универсальной покрышкой на плоскости. Этот усеченный шестиугольник обозначен Ω_6' на рисунке 1.

Задача 19. Докажите, что средний и правый шестиугольники с рисунка 1 образуют упс. Треугольники, как и в задаче 18, отсекаются прямыми, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника с соответствующими вершинами, и проходят на расстоянии 1/2 от центра.

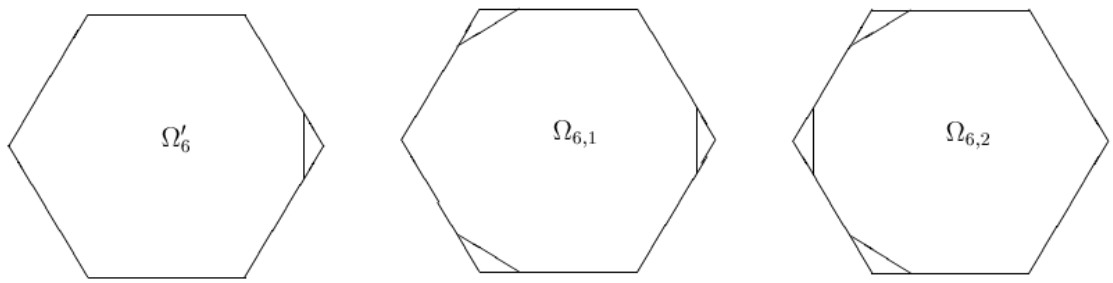

Рисунок 1: Примеры упс.

3 Задачи для продолжительного исследования

3.1 Двумерный случай и покрышки

Задача 1. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6.

Задача 2* **(исследовательская).** Можно ли доказать, что при некотором $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ любое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние a?

Задача 3. Укажите такое n, что любое множество на плоскости можно разбить на n частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Какое наименьшее n Вы можете указать?

Задача 4*. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 6 частей, диаметры которых не превосходят величины $\sqrt{\frac{13}{3}}(2-\sqrt{3}) = 0.5577...$ **Указание.** Используйте упс $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$.

Задача 5.** А еще лучше, чем в задаче 4*?

Задача 6*. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.603. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6'.

Задача 7.** А еще лучше, чем в задаче 6*?

Задача 8. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 4 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 9. Докажите неулучшаемость результата задачи 8.

Задача 10. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 7 частей, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{2}$.

Задача 11. Докажите неулучшаемость результата задачи 10.

3.2 Конечные множества точек

Пусть Ω — конечное множество точек (на плоскости или в пространстве). Пусть в нем всего n точек. Найдем длины всех отрезков, которые соединяют пары этих точек. Упорядочим полученные числа по невозрастанию величины. Тогда самые большие числа равны диаметру Ω. Назовем следующие по величине числа *вторыми диаметрами*, еще меньшие — *третьими диаметрами* и т.д. Например, в квадрате длины диагоналей — это диаметры, а длины сторон — вторые диаметры. А в кубе есть еще и третьи диаметры.

Задача 1. Докажите, что в любом множестве из n точек в трехмерном пространстве не больше $2n-2$ диаметров.

Задача 2. Можно ли улучшить результат предыдущей задачи?

Задача 3 (исследовательская). Найдите как можно более точные оценки для максимального числа k-ых диаметров в множествах из n точек на плоскости.

Задача 4 (исследовательская). Найдите как можно более точные оценки для максимального числа k-ых диаметров в множествах из n точек в $\mathbb{R}^3$.

3.3 Трехмерное пространство и покрышки

Задача 1. Докажите, что $f(3) \geqslant 4$.

Задача 2*. Докажите, что шар радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Объясните, почему шар радиуса $r < \sqrt{\frac{3}{8}}$ не является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. Разбейте шар радиуса 1/2 в пространстве на 4 части меньшего диаметра (т.е. диаметры частей должны быть меньше 1).

Задача 5*. Впишем в шар радиуса 1/2 правильный тетраэдр. Рассмотрим 4 трехгранных угла, которые получаются, если соединять центр шара с вершинами граней тетраэдра. Пересечем каждый из углов с шаром. Получится разбиение шара на 4 одинаковых части. Найдите диаметры этих частей.

Задача 6. Назовем *правильным симплексом* в $\mathbb{R}^n$ аналог правильного треугольника на плоскости и правильного тетраэдра в пространстве. А именно, рассмотрим $n+1$ точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$, обладающих тем свойством, что $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = a$ для всех пар $i \neq j$ и некоторого $a > 0$. Докажите, что симплекс существует.

Задача 7*. Назовем n-мерным шаром множество

$$B = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Это шар радиуса 1 и диаметра 2. Впишем в этот шар правильный симплекс. Найдите длину его стороны.

Задача 8.** Осуществим разбиение шара из задачи 7*, аналогичное разбиению из задачи 5*. А именно, впишем в шар правильный симплекс с длиной стороны, найденной в задаче 7*, и рассмотрим многогранные углы с вершиной в центре шара, проходящие через грани симплекса (граней $n+1$). Найдите диаметры полученных частей. В частности, убедитесь, что они меньше 2 и что их величины стремятся к 2 при $n \to \infty$.

Задача 9. Возьмем шар B_1 радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ и пересечем его с произвольным шаром B_2 радиуса 1, центр которого расположен на границе шара B_1. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — универсальная покрышка в $\mathbb{R}^3$.

Задача 10*. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ разбивается на 5 частей диаметра меньше 1.

Задача 11. Докажите, что $f(4) \geqslant 5$. Вообще, $f(n) \geqslant n+1$.

Задача 12. Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для $f(4)$.

Задача 13. Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для $f(n)$.

Задача 14. Постройте покрышку в $\mathbb{R}^4$, аналогичную покрышкам из задач 16 и 9.

Задача 15*. Докажите, что покрышка из задачи 14 разбивается на 9 частей диаметра меньше 1 и что, стало быть, $f(4) \leqslant 9$.

Список цитированной литературы

[1] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[2] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[3] В.Г. Болтянский и И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, “Наука”, 1965.

[4] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.