ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2009 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

1. Научные публикации

Опубликован обзор [2] в «Успехах математических наук». Обзор посвящён применению топологических методов в комбинаторной геометрии, в основном в нём освещаются теоремы типа Борсука-Улама, раскраска графов и гиперграфов, задачи вписывания и описывания многогранников вокруг выпуклых тел, некоторые приложения топологии грассманианов к комбинаторной и выпуклой геометрии. Результаты, цитируемые в обзоре, ранее были слабо представлены в русскоязычных статьях и монографиях.

В работах [3, 4, 5] изучались некоторые топологические свойства действия групп вида $G = (Z_p)^k$ (и некоторых чуть больших групп) на $SO(n)$ правыми умножениями, возникающего из некоторых линейных представлений G. Отсюда выводятся результаты о вписывании G-симметричного (в частности, правильного) кросcполитопа (многомерного октаэдра) в гладкую гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, являющуюся гладко вложенной сферой. Случай p нечётного был сделан мною ранее, случай $p = 2$ был доделан в этом году, последний случай требует рассмотрения бóльшей группы, вида $G = D_8 \times (Z_2)^{k-1}$. Те же топологические соображения позволяют делить абсолютно непрерывные меры в $\mathbb{R}^n$ на равные части G-симметричными системами конусов с общей вершиной, получающимися из некоторой данной системы движениями.

В статье [6] изучались вопросы существования аффинной m-плоскости, пересекающей семейство $n + 1$ компактных множеств $C_1, \ldots, C_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$. Один из вариантов теоремы Борсука-Улама даёт такой критерий при $m = 0$: надо, чтобы объединение множеств было выпуклым множеством $K = \bigcup C_i$, и пересечения $\partial K \cap C_i$ не содержали «антиподальных» точек, то есть точек с противоположными нормалями относительно K. Оказалось, что для существования m-мерной плоскости («трансверсали») достаточно, чтобы то же самое выполнялось для всякой $n - m$-мерной проекции системы множеств. Этот результат следует из некоторых несложных топологических свойств грассманиана и его канонического расслоения.

Также в статье [6] изучался такой вопрос: есть n абсолютно непрерывных вероятностных мер μ_i в $\mathbb{R}^n$, даны числа $\alpha_i \in (0, 1)$ при $i = 1, \ldots, n$. Надо найти полупространство $H \subset \mathbb{R}^n$, которое отделяет от каждой меры по α_i, то есть $\mu_i(H) = \alpha_i$ для всех i. В общем случае такое деление невозможно, но ранее были найдены некоторые достаточные условия, гарантирующие деление. В моей работе эти достаточные условия ослабляются.

В работе [7] были сформулированы некоторые аналоги теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича о покрытиях симплекса, относящиеся к покрытиям произведения пары симплексов. Некоторые аналогичные факты были известны ранее. Из этой теоремы были выведены некоторые следствия. Например, такое. Рассмотрим семейство связных компактов на плоскости и натуральные числа $n \leq m$. Предположим, что любые $m+1$ или менее множеств семейства можно пересечь m горизонтальными, или n вертикальными линиями. Тогда всё семейство можно пересечь m горизонтальными и n вертикальными линиями.

В работе [8] изучались конфигурационные пространства $\mathbb{R}^n$, то есть пространства наборов из q попарно различных точек в $\mathbb{R}^n$. Условие попарной различности также можно заменить на отсутствие k-кратных совпадений — тогда получаются обобщённые конфигурационные пространства (configuration-like spaces). На этих пространствах естественно действует группа перестановок Σ_q, также рассматривалось действие её подгрупп вида $G = (Z_p)^k$, где $p^k = q$. Для разных приложений важно оценивать «сложность» этого действия группы G на конфигурационном пространстве, в частности под сложностью можно понимать нетривиальность алгебры G-эквивариантных когомологий конфигурационного пространства в каком-либо смысле. В работе [8] приведены некоторые результаты, показывающие что образ алгебры когомологий группы G в алгебре эквивариантных когомологий обобщённых конфигурационных пространств достаточно велик, также приведены некоторые близкие результаты.

Изучение когомологий конфигурационных пространств $\mathbb{R}^n$ позволяет оценить снизу (эквивариантную) категорию Люстерника-Шнирельмана конфигурационных пространств не только $\mathbb{R}^n$, но и произвольного n-мерного многообразия M. В частности, получаются оценки на количество критических точек гладкого собственного функционала на конфигурационном пространстве многообразия, симметричного относительно действия G, или всей группы перестановок Σ_q.

В работе [9] было продолжено (см. также [1]) изучение теорем о центральной точке и теорем типа Тверберга для семейств выпуклых множеств. Например, рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, в котором всякие d или менее множеств имеют общую точку, и количество элементов не менее $(q-1)(d+1)+1$. Тогда можно найти точку $x \in \mathbb{R}^d$ и разбить $\mathcal{F}$ на q подмножеств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q$ так, что для всякого $i = 1, \dots, q$ точка x либо содержится в объединении i-го подсемейства $\bigcup \mathcal{F}_i$, либо отделяется объединением $\bigcup \mathcal{F}_i$ от бесконечности. Этот результат был доказан для случая, когда q — степень простого, что является типичных ограничением для метода, связанного с применением когомологий групп перестановок из q элементов и их подгрупп (см. абзацы выше).

Текущая информация о моих публикациях доступна также на сайте www.rkarasev.ru.

2. Конференции

Участвовал в конференции «Transversal and Helly-type theorems in Geometry, Combinatorics and Topology» в г. Банфф, Канада. Прочитал два доклада по темам работ [1, 6, 9], обсудил результаты со специалистами.

3. Преподавательская деятельность

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в олимпиаде IMC 2009 в г. Будапешт.

Список литературы

[1] Р.Н. Карасёв, "Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения", *Мат. сборник*, **199**:10 (2008), 41–62.

[2] Р.Н. Карасёв, "Топологические методы в комбинаторной геометрии", *Успехи мат. наук*, **63**:6(384) (2008), 39–90.

[3] R.N. Karasev, "Equipartition of a measure by $(Z_p)^k$-invariant fans", *Discrete and Computational Geometry*, 2009 doi 10.1007/s00454-009-9138-6.

[4] R.N. Karasev, "Knaster's problem for $(Z_2)^k$-symmetric subsets of the sphere S^{2^k-1}", *Discrete and Computational Geometry*, 2009 doi 10.1007/s00454-009-9215-x.

[5] R.N. Karasev, A.Yu. Volovikov, *Knaster's problem for almost $(Z_p)^k$-orbits*, arXiv: 0905.2047, 2009.

[6] Р.Н. Карасёв, "Теоремы типа Борсука–Улама для плоскостей и плоские трансверсали семейств выпуклых компактов", *Мат. сборник*, **200**:10 (2009), 39–58.

[7] R.N. Karasev, *KKM-type theorems for products of simplices and cutting sets and measures by straight lines*, arXiv: 0909.0604, 2009.

[8] R.N. Karasev, "The genus and the category of configuration spaces", *Topology and its Applications*, **156**:14 (2009), 2406–2415.

[9] R.N. Karasev, *Analogues of the central point theorem for families with d-intersection property in $\mathbb{R}^d$*, arXiv: 0906.2262, 2009.