ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2010 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

1. Научные публикации

В совместной с А.Ю. Воловиковым работе [1] изучались пространства типа конфигурационных. По определению, для топологического пространства Y можно рассмотреть пространство упорядоченных наборов $y_1, \dots, y_q \in Y$ для которых запрещены совпадения по k точек вида $y_{i_1} = \dots = y_{i_k}$. Такие пространства $V(Y, q, k)$ обладают естественным действием группы перестановок Σ_q, но в нашей работе мы в основном рассматривали действие некоторой группы G размера $|G| = q$ транзитивными перестановками точек $V(Y, q, k)$. Для такого действия G на пространстве $V(Y, q, k)$ можно из геометрических соображений получить оценки снизу и сверху на *род Шварца* этого действия. Род Шварца действия G на X определяется как минимальный размер покрытия $X_1 \cup \dots \cup X_n = X$, при котором для всякого i действие G на компонентах связности $C(X_i)$ не имеет неподвижных точек. Из этих результатов выводятся теоремы типа Борсука-Улама о наличии самосовпадений на G-орбитах для всякого непрерывного отображения $f : X \to Y$, где X — пространство с действием G.

В работе [2] изучались конфигурационные пространства многообразий $K^q(M)$ (равные $V(M, q, 2)$ в смысле предыдущего абзаца), с целью получения достаточных условий существования q-кратных самосовпадений (q-кратных точек) непрерывного отображения $f : M \to N$ между многообразиями. Конечно, вопрос имеет смысл при $\dim M \leq \dim N$. В случае $q = 2^\alpha$ достаточные условия самосовпадения получены в виде нетривиальности некоторых характеристических классов по модулю 2 виртуального расслоения $f^*(TN) - TM$, что напоминает ситуацию с характеристическими классами особенностей. В частности установлено, что для всякого непрерывного отображения проективного пространства $\mathbb{R}P^m$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = 2^l - 2$, $q(n - m + 1) < n + 1$ гарантировано q-кратное самосовпадение (q — степень двойки). Также получены новые оценки снизу для рода Шварца пространства $K^q(M)$ относительно действия симметрической группы Σ_q через характеристические классы касательного расслоения TM при $q = 2^\alpha$. В работе [3] было продолжено изучение конфигурационных пространств многообразий $K^q(M)$ в приложении к задаче о существовании k-регульрных вложений $f : M \to \mathbb{R}^n$, то есть непрерывных отображений, при которых образы любых k точек аффинно (линейно) независимы. В этой работе с использованием специальных конфигурационных пространств с метрическими ограничениями, более точной информации об алгебре когомологий симметрической группы и «внешних» квадратах Стинрода, удалось получить новые результаты о несуществовании k-регулярных вложений и некоторые оценки снизу рода Шварца $K^q(M)$.

В работе [4] изучалось действие группы Z_2 на грассманиане G_{2n}^n взятием ортогонального дополнения. О.Р. Мусин поставил вопрос о вычислении индекса (коиндекса по Коннеру и Флойду, рода Шварца) этого действия. Оказалось, что для $n = 2^\alpha$ эти величины равны $2n-1$, для остальных n также приведены некоторые оценки сверху и снизу, вообще род Щварца $\leq 2n-1$ при любых n. Из этого факта сразу выводятся геометрические следствия о совпадении численных показателей проекций $2n$-мерного выпуклого тела на некоторые взаимно ортогональные n-мерные подпространства.

В работе [5] изучались сравнительно элементарные вопросы о вписывании 4-угольника в замкнутую гладкую кривую без самопересечений, и аналог задачи Кнастера для 4 точек на двумерной сфере. Ранее предполагалось, что аналог задачи Кнастера для 4 точек на сфере верен, если точки лежат в одной плоскости — тогда для всякой непрерывной функции f на сфере эти точки можно повернуть так, что значения f в них сравняются. В этой работе построены четвёрки точек, лежащих на экваторе сферы, для которых задача Кнастера не выполняется.

В работе [6] введена мера невыпуклости простой многоугольной области на плоскости. Эта мера неформально определяется как минимальный (отрицательный) поворот касательной при обходе границы против часовой стрелки. Доказывается, что для «не очень невыпуклых» областей эта мера не уменьшается при операции суммы Минковского, гарантируя таким образом отсутствие «дыр» в сумме Минковского. Эти результаты имеют важные практические применения.

В работе [7] рассматривается задача: разбить множество $\mathbb{F}_p^*$ (для нечётного простого p) на пары так, чтобы разности в парах были заданными элементами поля $\mathbb{F}_p$. Эта задача ранее была известна и имелись алгебраические решения. В этой работе даётся её топологическое решение и топологически доказывается аналогичное утверждение для конечных полей порядка p^k, где p — нечётное простое. Также (эта часть принадлежит Ф.В. Петрову) даются некоторые обобщения этого утверждения и теоремы Коши–Дэвенпорта с алгебраическими доказательствами.

В работе [8] Л. Монтехано доказывает аналоги цветной теоремы Хелли и прочие утверждения с помощью леммы о топологической трансверсали, которая утверждает, что на пространстве m-трансверсалей (аффинных m-плоскостей, пересекающих каждое множество) к семейству выпуклых множеств $\mathcal{F}$ размера $r+k+1$ существует класс когомологий (явно выраженный как коцикл Шуберта), нетривиальность которого гарантирует наличие r трансверсали к семейству $\mathcal{F}$ (естественно, $r < m$). Мой вклад в работу заключается в доказательстве этой леммы.

В работе [9] я продолжил изучение теорем типа центральной точки и Тверберга для пересечения семейств выпуклых компактов лучами с центром в одной точке. Получены теоремы о существовании точки, для которой все лучи с началом в этой точке не пересекают заданное количество множеств семейства, при этом (очевидно) необходима оценка сверху на кратность покрытия данным семейством.

В работе [10] получены некоторые результаты о многочленах в духе теоремы Дворецкого. Доказана гипотеза Громова–Мильмана о существовании функции $n(d,k)$

(для чётных d), обладающей следующим свойством: для всякого однородного многочлена f от $n \geq n(d,k)$ переменных степени d найдётся подпространство $V \subset \mathbb{R}^n$ размерности k, для которого ограничение $f|_V$ пропорционально «круглому» многочлену $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{d/2}$. Точный вид функции $n(d,k)$ пока не выяснен. В случае нечётного d (теорема Бёрча) получены новые оценки на функцию $n(d,k)$ топологическими методами — с помощью вычисления класса Эйлера некоторых расслоений.

Защитил диссертацию «Теоремы типа Борсука–Улама в комбинаторной и выпуклой геометрии» на соискание учёной степени доктора физ.-мат. наук в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

Текущая информация о моих публикациях доступна также на сайте www.rkarasev.ru.

2. Конференции

Участвовал в конференциях

- «Analysis, Topology, and Applications 2010» в г. Врнячка Баня, Сербия.
- «Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications» в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.
- «Metric Geometry of Surfaces and Polyhedra» в Московском государственном университете.

3. Преподавательская деятельность

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в олимпиаде IMC 2010 в г. Благоевград, Болгария.

Список литературы

[1] A.Yu. Volovikov, R.N. Karasev, *Configuration-like spaces and coincidences of maps on orbits*, arXiv: 0911.4338, 2009.
[2] R.N. Karasev, *Self-coincidences of continuous maps between manifolds*, arXiv: 1002.0660, 2010.
[3] R.N. Karasev, *Regular embeddings of manifolds and topology of configuration spaces*, arXiv: 1006.0613, 2010.
[4] R.N. Karasev, *Z_2-index of the grassmanian G_{2n}^n*, arXiv: 1006.2263, 2010.
[5] R.N. Karasev, *A note on Makeev's conjectures*, arXiv: 1002.4070, 2010.
[6] R.N. Karasev, "A measure of non-convexity in the plane and the Minkowski sum", *Discrete and Computational Geometry*, 2010 doi 10.1007/s00454-010-9258-z.
[7] R.N. Karasev, F.V. Petrov, *Partitions of nonzero elements of a finite field into pairs*, arXiv: 1005.1177, 2010.
[8] L. Montejano, R.N. Karasev, *Topological transversals to a family of convex sets*, arXiv: 1006.0104, 2010.
[9] R.N. Karasev, *Tverberg-type theorems for intersecting by rays*, arXiv: 1007.3072, 2010.
[10] V.L. Dol'nikov, R.N. Karasev, *Dvoretzky type theorems for multivariate polynomials and sections of convex bodies*, arXiv: 1009.0392, 2010.