Отчёт лауреата конкурса Пьера Делиня Е.П.Вдовина за 2010 год

В текущем году получены следующие результаты.

1. Завершена классификация всех простых строго вещественных групп (совместно с моим аспирантом А.А.Гальтом). Напомним, что группа называется *вещественной*, если любой её элемент сопряжён со своим обратным и группа называется *строго вещественной*, если любой её элемент сопряжён со своим обратным с помощью некоторой инволюции (т.е. элемента порядка 2). Термин «вещественная» связан с тем, что конечная группа является вещественной тогда и только тогда, когда её таблица обыкновенных характеров является вещественной. Термин «строго вещественная» связан со следующим замечанием. Если элемент x группы G сопряжён со своим обратным и его порядок $|x|$ больше, чем 2, то сопрягающий элемент y можно выбрать так, чтобы порядок $|y|$ был степенью двойки. Таким образом, инволюция — это элемент наименьшего возможного порядка, инвертирующий данный элемент x. Если x — строго вещественный элемент порядка большего, чем 2 и t — инвертирующая его инволюция, то элемент xt также является инволюцией, поэтому справедливо равенство $x = (xt)t$, т.е. элемент x представим в виде произведения двух инволюций. Обратно, если некоторый элемент x представим в виде произведения двух инволюций $x = st$, то $x^t = ts = x^{-1}$, т.е. элемент x является строго вещественным. В «Коуровскую тетрадь», всемирно известный сборник нерешённых проблем по теории групп, А.И.Созутов внёс следующий известный вопрос (проблема 14.82): Описать все конечные простые группы, в которых каждый элемент является произведением двух инволюций. Поскольку в любой конечной простой группе любая инволюция содержится в элементарной абелевой группе порядка 4, приведённые выше рассуждения показывают, что решение данного вопроса эквивалентно классификации всех простых строго вещественных групп. В 2010 году удалось доказать, что простые группы ${}^3D_4(q)$ являются строго вещественными. Тем самым завершена многолетняя работа различных специалистов (первая статья в данном направлении появилась ещё в 1968 году) и классификация конечных простых строго вещественных групп завершена. Соответствующий результат выложен в arxiv.org и опубликован в статье в «Сибирском математическом журнале».

2. Совместно с Д.О.Ревиным продолжено изучение холловых подгрупп в конечных группах и свойств холловых подгрупп и конечных групп, их содержащих. Доказано, что класс C_π-групп является формацией (соответствующий результат сдан в печать в «Алгебру и анализ»), а также построены примеры, показывающие, что класс конечных групп, содержащих холловы подгруппы, не является классом Фиттинга. Кроме того, подготовлена и сдана в печать в «Успехи математических наук» обзорная статья об обобщениях теоремы Силова в конечных группах.

3. Продолжено изучение размера базы транзитивной группы, в которой накладываются ограничения на стабилизатор точки. Введём необходимые определения. Пусть группа G действует транзитивно на некотором множестве Ω. Минимальное число k, для которого существуют точки $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega$, удовлетворяющие условию: «если $g \in G$ стабилизирует точки $\omega_1, \dots, \omega_k$, то g действует на Ω тривиально», называется *размером базы* группы G (далее размер базы обозначается через $Base(G)$), а сами точки $\omega_1, \dots, \omega_k$ называют *базой*. База и размер базы играют важную роль в теории конечных групп, а также в компьютерных алгоритмах. Для группы G, действующей на множестве Ω, можно определить индуцированное действие на m-ой декартовой степени Ω^k по следующему правилу: $g : (\omega_1, \dots, \omega_m) \mapsto (\omega_1^g, \dots, \omega_m^g)$ (здесь ω_i^g — образ точки ω_i относительно действия элемента

g). Если группа G действует точно, то точки $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega$ образуют базу группы G тогда и только тогда, когда точка $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k$ является G-регулярной, и на множестве Ω^{k-1} не существует G-регулярных орбит. Если группа G действует на множестве Ω точно, то обозначим через $Reg(\Omega, m)$ количество G-регулярных орбит на множестве Ω^m. Ясно, что $Reg(\Omega, m) = 0$, если $m < Base(G)$. Хорошо известно, что транзитивное действие эквивалентно действию правыми умножениями на правых смежных классах по стабилизатору точки. Более точно, если G_ω — стабилизатор точки ω и $G : G_\omega$ — множество правых смежных классов группы G по подгруппе G_ω, то группа G действует на смежных классах по следующему правилу $x : G_\omega y \mapsto G_\omega(yx)$ и это действие совпадает с действием группы G на множестве Ω. Обобщая эту ситуацию, рассмотрим произвольную группу G и её подгруппу H и определим действие G на правых смежных классах $G : H$ как действие правыми умножениями. Размер базы и количество G/H_G-регулярных орбит на множестве $(G : H)^m$ обозначим через $Base_H(G)$ и $Reg_H(G, m)$ соответственно. В 2010 году удалось доказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть G — конечная группа, $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ — композиционный ряд группы G, являющийся уплотнением некоторого её главного ряда. Предположим, что существует такое число k, что для каждого неабелева фактора G_i/G_{i-1} и для любой разрешимой подгруппы L группы $\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1})$ справедливы неравенства $Base_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1})) \leqslant k$ и $Reg_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1}), k) \geqslant 5$. Тогда для любой максимальной разрешимой подгруппы S группы G справедливо неравенство $Base_S(G) \leqslant k$. Более того, если $k \geqslant 6$, то неравенство $Reg_L(\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1}), k) \geqslant 5$ всегда справедливо.*

Данная теорема сводит изучение размера базы для группы с разрешимым стабилизатором точки к аналогичному вопросу для почти простых групп. Результат выложен в arxiv.org и сдан в печать в Journal of Algebra and Applications.

Опубликованные работы:

1. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечной группе», Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), №3, 506–516. Перевод E.P.Vdovin, D.O.Revin, «Conjugacy criterion for Hall subgroups in a finite group», Siberian mathematical journal, v. 51 (2010), №3, 402–409.

2. D.O.Revin, E.P.Vdovin, «On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups», Journal of Algebra, v. 324 (2010), №12, 3614–3652.

3. Е.П.Вдовин, А.А.Гальт, «Строгая вещественность конечных простых групп», Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), №4, 769–777. Перевод E.P.Vdovin, A.A.Galt, «Strong reality of finite simple groups», Siberian mathematical Journal, v. 51 (2010), №4, 610–615.

Работы, сданные в печать:

1. D.O.Revin, E.P.Vdovin, «Existence criterion for Hall subgroups of finite groups», Journal of Group Theory, doi: 10.1515/JGT.2010.037. (см. http://arxiv.org/abs/0803.3868)

2. A.V.Vasil'ev, E.P.Vdovin, «Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group», Algebra and Logic, в печати (см. http://arxiv.org/abs/0905.1164)

3. E.P.Vdovin, «On the base size of a transitive group with solvable point stabilizer», Journal of Algebra and Application, в печати (см. http://arxiv.org/abs/1011.4341)

4. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, Л.А.Шеметков, «Формации конечных C_π-групп», Алгебра и анализ, в печати.

5. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Теоремы силовского типа», УМН, в печати.

Участие в конференциях:

1. Мальцевские чтения, 2-6 мая, Новосибирск, Россия (пленарный доклад).

2. International Algebraic Conference dedicated to the 70th birthday of Anatoly Yakovlev St. Petersburg, Russia June 19 - 24, 2010 (доклад, руководитель секции).

3. Международная научная студенческая конференция, 10-14 апреля, Новосибирск (приглашённый лектор).

4. Международная молодёжная школа-конференция «Алгоритмические проблемы теории групп и смежных областей», Новосибирск, 27 июля - 7 августа (лекция, учёный секретарь).

Педагогическая деятельность:

17 сентября мой аспирант, Алексей Альбертович Гальт успешно защитил кандидатскую диссертацию по теме «Вопросы сопряжённости в конечных группах лиева типа». Я также являюсь научным руководителем Номины Чингизовны Манзаевой (магистрант 2-го года обучения Новосибирского госуниверситета) и Курмазова Романа Константиновича (студент 3-го года обучения НГУ). Для студентов начальных курсов НГУ организован спецкурс Finite groups (совместно с В.Д.Мазуровым, А.В.Васильевым и Д.О.Ревиным), для студентов и аспирантов НГУ читаю спецкурс «Линейные алгебраические группы» (двухгодовой).

В 2010 году я был учёным секретарём и одним из основных организаторов международной молодёжной школы-конференции «Алгоритмические проблемы теории групп и смежных областей», которая прошла на турбазе Новосибирского государственного университета Эрлагол. В качестве лекторов были приглашены Eamonn O'Brian (Aukland, New Zealand), А.Ю.Ольшанский (МГУ и Vanderbilt University, Nashville, USA), А.В.Васильев и В.А.Чуркин (оба ИМ СО РАН). Каждый из лекторов прочёл курс из 6 или 8 лекций, курсы из 6-и лекций сопровождались также двумя семинарами (каждый), т.е. каждый из лекторов провёл по 8 занятий (каждое по 60 минут). Кроме того, молодые участники школы выступили с краткими сообщениями о своих результатов. В последний день школы я прочитал лекцию. Рабочим языком школы был английский, тексты всех приглашённых лекторов можно найти на страничке школы http://www.math.nsc.ru/conference/isc2010/. Школа прошла успешно во всех смыслах, молодые участники получили хороший стимул для дальнейшей научной работы.