Численное исследование задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек

План исследований

Рассматриваемые в проекте проблемы относятся к классу нелинейных задач механики сплошной среды. Такие задачи возникают при описании различных процессов в механике, биомеханике, при проектировании сложных конструкций для работы в экстремальных условиях.

Необходимость решения указанных задач требует и соответствующих изменений в образовательном процессе - разработки новых спецкурсов, тем курсовых и дипломных работ для студентов, специализирующихся в области прикладной математики.

На первом этапе планируется разработка и исследование математических моделей и численных методов решения рассматриваемых нелинейных задач и их теоретическое исследование. Затем предполагается реализация этих методов на компьютерах, проведение вычислительных экспериментов, анализ их результатов, разработка соответствующих спецкурсов в области численных методов, тем заданий на выполнение курсовых и дипломных работ. У автора, имеется опыт исследования и решения различных задач по рассматриваемой тематике. В частности, проведено исследование математических моделей и алгоритмов их численной реализации для задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек, накоплен опыт решения задач о перистальтике тонкого кишечника, проведено исследование математических моделей стационарных задач теории мягких оболочек.

Проведенные исследования

1. Доказана разрешимость квазивариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах, возникающих при описании задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек, ограниченных абсолютно жестким и абсолютно гладким препятствием.

Рассматриваются задачи об определении положения равновесия мягких оболочек[8],[10],[12],[13], закрепленных по краям, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузок, и ограниченных в перемещениях препятствием, при условии, что поверхность препятствия описывается достаточно гладкой (не обязательно выпуклой) функцией. Деформации и перемещения допускаются конечными. Сначала, исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат, сформулированы краевые задачи. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. Установлена эквивалентность указанных задач. В предположении, что функции, описывающие зависимость модуля силы натяжения в нитях от деформаций, имеют степенной рост на бесконечности, указанные задачи сформулированы в виде квазивариационных неравенств в банаховых пространствах. Доказаны теоремы разрешимости. В одномерном случае проведено построение точных решений для ряда модельных задач.

Введем в плоскости поперечного сечения декартову систему координат Ox_1x_2 таким образом, чтобы точки закрепления краев оболочки имели координаты $(0,0)$ и $(l,0)$. Считаем, что длина оболочки в недеформированном состоянии равна l. Положение оболочки в плоскости поперечного сечения будем описывать вектор-функцией $w(s) = (w_1(s), w_2(s))$, где $0 \le s \le l$ – лагранжева координата, выбранная так, что длина оболочки, отсчитываемая в недеформированном состоянии от точки $(0,0)$ до текущей, равна s (т.е. s – натуральный параметр при описании недеформированной оболочки). Деформация оболочки характеризуется степенью удлинения $\lambda(w) = |w'|/|\mathring{w}'|$, $\mathring{w}$ – функция, описывающая положение оболочки в недеформированном состоянии $\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2) = (s, 0), s \in [0, l]$.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, предполагаем, что она удовлетворяет условиям:

$$T(\xi) = 0,\, \xi \le 1 \quad \text{(оболочка не воспринимает сжимающих усилий)}, \tag{1}$$

$$T\ -\ \text{непрерывная, неубывающая,} \tag{2}$$

существуют положительные k_0, k_1, $p > 1$, такие, что

$$k_0(\xi - 1)^{p-1} \le T(\xi) \le k_1 \xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \ge 1. \tag{3}$$

Считаем, что оболочка ограниченна в перемещениях абсолютно твердым препятствием с абсолютно гладкой поверхностью, т.е. оболочка не порождает касательных усилий при контакте с ним, и воздействие препятствия на оболочку может быть заменено силой. Эта сила (реакция опоры) имеет плотность. Последнее условие используется при постановке контактных задач в теории упругости [17],[18].

Предполагается, что поверхность препятствия задается непрерывно-дифференцируемой вогнутой функцией. Это приводит к появлению невыпуклого множества допустимых положений оболочки, и задачу приходится формулировать в виде квазивариационного неравенства [1].

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид [2],[3],[14]:

$$D + \lambda P_0 = 0, \qquad \text{где} \quad D(w(s)) = \left(T(\lambda) \frac{w'}{|w'|} \right)' + \lambda \tilde{q} + \tilde{f}, \tag{4}$$

которые дополняются граничными условиями

$$w(0) = (w_1(0), w_2(0)) = (0,0),\ w(l) = (w_1(l), w_2(l)) = (l, 0). \tag{5}$$

Здесь $\tilde{q}$ и $\tilde{f}$ – известные плотности погонных и массовых сил соответственно, P_0 – функция, характеризующая плотность силы взаимодействия оболочки с препятствием. Изначально функция P_0 не известна и, наряду с равновесным положением оболочки w, является решением задачи.

Относительно внешних нагрузок считаем, что погонная нагрузка является постоянной и следящей, т.е. оболочка нагружена постоянным давлением q_0, при этом $\lambda\,\tilde{q} = -q_0\,Q\,\tilde{u}'$, где $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, массовая нагрузка считается заданной функцией лагранжевой координаты s, и для любых v из V определена форма $\int\limits_0^l (\tilde{f}, v)\, ds$.

Введем операторы $A, B : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$, порождаемые формами

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_0^l \frac{T(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\ (\tilde{u}\,', v\,')\, ds,\ \langle Bu, v\rangle = \int\limits_0^l (q_0\, Q\tilde{u}', v)\,,\ \langle f, v\rangle = \int\limits_0^l (\tilde{f},\, v)\, ds.$$

Под обобщенным решением задачи будем понимать, функцию $u \in K$, удовлетворяющую следующему квазивариационному неравенству[1]:

$$\langle Au + q_0\, Bu - f, v - u\rangle \ge 0 \qquad \forall v \in K(u). \tag{6}$$

$K = \left\{ u \in V\ :\ \ \overset{\circ}{w}_2 + u_2 \ge F(\ \overset{\circ}{w}_1 + u_1\ ),\ s \in (0,l) \right\}$, $K(u) = \{ v :\ u + \alpha\,(v - u) \in K \text{ для всех } \alpha \in (0,1) \}$. Установлены эквивалентность задач (4),(5) и (6)

Для операторов входящих в неравенство (6) устанавливаются следующие свойства операторов: псевдомонотонность, потенциальность, непрерывность, коэрцитивность [3],[9].

Теорема 1 *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (1), (2), (3). Тогда:*

1) если $p > 2$, то задача (6) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;

2) если $p = 2$, то задача (6) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0| < k_0/c_1$.

Отдельно рассматривается случай, когда функция, описывающая препятствие – выпуклая. В этом случае множество K – выпуклое и совпадает с $K(u)$. Поэтому задача (6) формулируется в виде следующего вариационного неравенства:

$$\text{Найти } u \in K: \qquad \langle Au + q_0\, Bu - f, v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in K. \tag{7}$$

Теорема 2 *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (1), (2), (3). Тогда:*

1) если $p > 2$, то задача (7) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;

2) если $p = 2$, то задача (7) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0| < k_0/c_1$;

3) если $1 < p < 2$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, что задача (7) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*} \leq \delta, \quad |q_0| < q_\delta$.

Предложен полуобратный метод построения точных решений задач об определении положения равновесия бесконечно длинных цилиндрических оболочек, закрепленных по краям, находящихся под воздействием давления и ограниченных в перемещениях препятствием. Построены точные решения для ряда модельных задач [3].

2. Построены математические модели осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения в виде вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах. Доказана разрешимость вариационных неравенств.

Рассматривается пространственная осесимметричная задача о равновесии мягкой сетчатой оболочки вращения, находящейся под воздействием массовой и поверхностной нагрузок. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя системами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких упругих нитей. Предполагается, что узлы сети фиксированы, и ни в начальном состоянии, ни в процессе деформации соседние нити не соприкасаются. Считается, что ячейки сети малы и не сопротивляются сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными.

Итак, рассматриваемая оболочка образована переплетением двух семейств нитей, одно из которых имеет циркулярное направление, а другое – продольное. Края оболочки считаются закрепленными. Поверхностная нагрузка предполагается постоянной и следящей, т.е. направлена по нормали к поверхности оболочки. Вектор плотности массовых сил лежит в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости. При этом перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направлении. Эта задача сформулирована математически в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве. Установлена разрешимость вариационного неравенства.

Указанная задача в цилиндрической системе координат имеет вид [4],[5],[14]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{dy}{ds}\right)\right) + \lambda_2\, q_0\, \frac{dw}{ds} + \tilde{f}_1 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\frac{dw}{ds}\right) - \frac{1}{r_0}\, T_2 - \lambda_2\, q_0\, \left(1 + \frac{dy}{ds}\right) + \tilde{f}_2 = 0, \tag{9}$$

$$y(0) = w(0) = 0, \quad y(l) = w(l) = 0, \tag{10}$$

где $y, w,$ – перемещения точек оболочки в продольном и циркулярном направлениях соответственно, $\tilde{f}$ – плотность массовых сил, q_0 – плотность следящей поверхностной нагрузки, T_1, T_2 – функции, задающие физические соотношения в нитях в продольном и циркулярном направлениях соответственно, λ_1, λ_2 – степени удлинения в продольном и радиальном направлениях соответственно. Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, имеет степенной рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается.

Обозначим $u_1 = y$, $u_2 = w$, $\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, $\tilde{u}_1(s) = u_1(s) + s$, $\tilde{u}_2(s) = u_2(s) + r_0$; при этом $\lambda_1(u) = |\tilde{u}'(s)|$, $\lambda_2(u) = 1 + u_2(s)/r_0$.

Относительно функций T_1 и T_2 считаем, что выполнены условия (аналогичные условиям (1), (2))

$$T_i(\xi) = 0,\, \xi \le 1,\, i = 1, 2, \tag{11}$$

$$T_i,\ i = 1, 2, - \text{ непрерывные, неубывающие,} \tag{12}$$

T_1 имеет на бесконечности степенной рост порядка $p - 1 > 0$, т.е. существуют положительные k_0, k_1, такие, что

$$k_0\,(\xi - 1)^{p-1} \le T_1(\xi) \le k_1\,\xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \ge 1. \tag{13}$$

Обозначим $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}\ (0, l)\right]^2$, $K = \{u \in V : r_0 + u_2 \ge 0\}$, $\|\cdot\|$ – норма, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между V и V^*.

Под обобщенным решением осесимметричной задачи будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую вариационному неравенству:

$$\langle (A + D + q_0\,(B + H))u,\, v - u \rangle \ge \langle f,\, v - u \rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{14}$$

где операторы $A, B, D, H : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$, порождаются формами

$$\langle Au, v \rangle = \int\limits_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\ (\tilde{u}\,', v\,')\, ds, \quad \langle Bu, v \rangle = \int\limits_0^l [\, \tilde{u}\,'_1\, v_2 + u_2\, v\,'_1 \,]\, ds,$$

$$\langle Du, v \rangle = \frac{1}{r_0} \int\limits_0^l T_2(\lambda_2(u))\, v_2\, ds, \quad \langle Hu, v \rangle = \frac{1}{r_0} \int\limits_0^l \left[\frac{1}{2}\, u_2^2\, v\,'_1 + \tilde{u}\,'_1\, u_2\, v_2 \right] ds, \quad \langle f, v \rangle = \int\limits_0^l (\tilde{f},\, v)\, ds.$$

Теорема 3 *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (11) – (13). Тогда:*

1) если $p > 3$, то неравенство (14) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;

2) если $p = 3$, то неравенство (14) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0| < k_0/c_2$;

3) если $1 < p < 3$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, что задача (14) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*} \le \delta$, $\quad |q_0| < q_\delta$.

3. Предложены приближенные методы решения задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек и осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения [4]–[7].

Итак используется следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}), v - u^{(n+1)} \right\rangle \ge \tau \left\langle f - Pu^{(n)},\, v - u^{(n+1)} \right\rangle \quad \forall\, v \in K, \tag{15}$$

где $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ, $P = A + q_0 B$,в случае задачи об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких оболочек, ограниченных в перемещениях препятствием и $P = A + B + q_0(H + B)$ в случае задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Получены достаточные условия сходимости этих методов [4]–[7].

4. Построены точные решения для ряда модельных задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек. Разработан комплекс программ, реализующий рассмотренные методы. Проведены численные расчеты, подтвердившие эффективность предложенных алгоритмов.

Проект будущих исследований

Предполагается построить математическую модель задачи об определении положения равновесия мягкой биологической оболочки. В качестве такой оболочки выбирается тонкая кишка [11].

Тонкая кишка человека и животных представляет собой длинную цилиндрическую трубку. В брюшной полости она достаточно хорошо иммобилизована близлежащими органами. Проксимальный конец ее неподвижно прикреплен к желудку, дистальный – к слепой кишке.

Анатомическую поверхность кишки отождествим с гладкой срединной поверхностью, определяющей ее положение в пространстве. Рассмотрим мягкую сетчатую биологическую оболочку, представляющую из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса r_0 длины l. Предполагается, что вектора плотностей поверхностных и массовых сил лежат в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости, и перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направлении. Поверхностная нагрузка предполагается следящей, т.е. направлена по нормали к поверхности оболочки. Стенка кишки является полиморфным гетерогенным биокомпозитом, заключеным в податливую матрицу гликопротеидов [19]. Опорную строму нервно-мышечного комплекса и железистых компонент ткани формируют гофрированные в плоскости коллагеновые, эластические и аргирофильные волокна. Дискретно расположенные соединительно-тканные фибриллы определенным образом скреплены в местах пересечения "анастомотическими связями", что создает архитектонику аналогично крупно- и мелко-петлистой сети ортогонального плетения. Многообразие форм двигательной активности обусловлено работой наружного продольного (m. longitudinalis) и внутреннего циркулярного мышечных (m. circularis) слоев. При этом расположение сократительных волокон в m. longitudinalis – истинно осевое, а в m. circularis – строго круговое.

Многокомпонентность, конструктивная анизотропия и отсутствие слоистой двумерной структуры являются одной из причин сложности моделирования объекта, записи для него определяющей системы уравнений состояния и равновесия. Однако, такие специфические особенности, как тонкостенность, большая деформативность, слабая сопротивляемость изгибу и практическая неспособность воспринимать сжимающие тангенциальные усилия, делают возможным использование модели мягкой безмоментной оболочки. Более того, основываясь на данных о строении, целесообразно моделировать тонкую кишку в рамках особого класса сетчатых оболочек, образованного двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей, в данном случае – составленных из мышечных волокон, заключенных в футляр соединительнотканных фибрилл.

Предполагается построить математические модель задач об определении положения равновесия резино-кордных изделий при ограничении в перемещениях препятствием [16].

Предполагается расширить класс функций, задающих физические соотношения, в частности, планируется включить в этот класс функции имеющие экспотенциальный рост. Задачи с указанными функциями не могут быть описаны с помощью аппарата пространств Соболева. Поэтому при математической формулировке данных задач будут использованы более широкие функциональные пространства, в частности, пространство Орлича.

Предполагается провести исследование разрешимости квазивариационных и вариационных неравенств возникающих, в частности, при математическом моделировании указанных задач.

Предполагается разработать и исследовать сходимость итерационных методов решения указанных вариационных неравенств.

Предполагается построить и исследовать конечномерные аппроксимации квазивариационных и вариационных неравенств.

Будут разработаны комплексы программ для численной реализации предложенных методов, проведены численные эксперименты с целью проверки эффективности приближенных методов.

Педагогические планы

Планируется разработать ряд новых спецкурсов, тем курсовых и дипломных работ для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Кроме того написание учебно-методических пособий и монографий.

Список литературы

1. Байокки К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. - М.: Наука, 1988. - 448 с.

2. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Бандеров В.В. Постановка и исследование стационарных задач теории мягких оболочек с невыпуклым допустимым множеством// Иссл. по прикл. матем. и информатике, Вып. 23, Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2001. - С. 3-7.

3. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А Исследование задачи о контакте нити с препятствием// Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 24. - Казань: Казанский госуниверситет, 2003. - С. 3-11.

4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Постановка и численное исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004. Ч. I / Под ред. Г.А.Михайлова, В.П.Ильина, Ю.М. Лаевского. - Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 390-395.

5. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Постановка и численное исследование осесимметричной задачи о равновесии мягкой оболочки вращения// Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 25. - Казань: Казанский государственный университет, 2004. - С. 11-33.

6. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Численное моделирование осесимметричных мягких сетчатых оболочек// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 6-го Всероссийского семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2005. - С. 39-45.

7. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Исследование сходимости итерационных методов решения осесимметричных задач о равновесии мягких сетчатых оболочек вращения// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 6-го Всероссийского семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2007. - С. 37-42.

8. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Инж. журн. МТТ. - 1966. - N 1. - С 84-89.

9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

10. Гимадиев Р.Ш. Расчет статических натяжений в одноосных мягких оболочках// В сб. Нестационарные задачи механики. Труды семинара. Вып. 22. - Казань: Изд-во Казанск. физико-технического ин-та. Казанск. филиала АН СССР, 1989. - С. 69-72. Проект будущих исследований.

11. Мифтахов Р.Н. Исследование ткани желудка человека при одноосном растяжении// В сб. Гидроупругостьоболочек. Труды семинара. Вып. 16. - Казань: Изд-во Казанск. физико-технического ин-та. Казанск. Филиала АН СССР, 1983. - С. 163-171.

12. Магула В.Э. Обзор работ, выполненных в лаборатории мягких оболочек в 1959-1967 г.г.// Сообщ. Лаборатории мягких оболочек. - Владивосток: ДВВИМУ, 1967. - Вып. 1. - С. 5-53.

13. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. - Л.: Судостроение, 1978. - 263 с.

14. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.

15. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек// Изв. АН СССР. Сер. МТТ. - 1976. - N 1. - С. 70-75.

16. Шешенин С. В., Победря Б. Е. Трехмерное моделирование напряженно-деформированного состояния пневматических шин. Труды 8-го симпозиума "Проблемы шин и резинокордных композитов", Москва, НИИ Шинной промышленности, 1997, 2, с. 320-326.

17. Kydoniefs A.D. Finite Axisymmetric Deformations of an Initially Cylindrical Elastic Membrane Enclosing a Rigid Body// Quart. Journ. Mech. and Applied Math. - 1969. - V. XXII. - Pt. 3. - P 319-331.

18. Kydoniefs A.D., Spenger A.J.M. Finite Axisymmetric Deformations of an Initially Cylindrical Elastic Membrane // Int. Journ. Engng. Sci. - 1967. - V. 367. - N. 5. - P 87-95.

19. Гистология/ Под ред. В.Г. Алексеева, Ю.Н. Афанасьева, Н.А. Юриной. – М.: Медицина, 1983. – 692 с.