МОНОДРОМИЯ ГОЛОНОМНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

План научных исследований, представленный на конкурс П. Делиня и конкурс фонда "Династия"

Т.М. Садыков

Линейная однородная голономная система дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и одной неизвестной функцией, зависящей от n переменных $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, имеет вид

$$Q_i\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) f(z_1, \ldots, z_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $Q_1, \ldots, Q_n$ – многочлены с конечным числом общих нулей в $\mathbb{C}^n$. Решения системы (1) даются фундаментальным принципом Паламодова-Мальгранжа-Эренпрайса (см. [3], глава 6).

Класс гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных содержит системы вида

$$x_i P_i(\theta) y(x) = Q_i(\theta) y(x), \ \ i = 1, ..., n. \tag{2}$$

Здесь P_i, Q_i – многочлены от n переменных, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$, и $\theta_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Гипергеометрические системы дифференциальных уравнений в частных производных образуют важный класс регулярных голономных идеалов в алгебре Вейля линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. К ним относятся система Гельфанда-Капранова-Зелевинского, уравнения Книжника-Замолодчикова, а также системы дифференциальных уравнений Горна и Меллина.

Нетрудно видеть, что (1) является частным случаем гипергеометрической системы дифференциальных уравнений. Действительно, переходя к переменным $x_i = e^{z_i}$, $i = 1, \ldots, n$ и обозначая $y(x_1, \ldots, x_n) = f(\log x_1, \ldots, \log x_n)$, мы преобразуем систему уравнений (1) к виду

$$Q_i(\theta_{x_1}, \ldots, \theta_{x_n}) y(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\theta_{x_i} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Следовательно, произвольная линейная однородная голономная система дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами является частным случаем гипергеометрической системы уравнений (2) при $P_1 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv 0$. С другой стороны, система (2) может рассматриваться как линейное возмущение идеала в коммутативной подалгебре $\mathbb{C}[\theta_{x_1}, \ldots, \theta_{x_n}]$ алгебры Вейля $\mathcal{D}_n$.

Таким образом, класс гипергеометрических систем уравнений может рассматриваться как *простейший класс систем уравнений в частных производных с непостоянными полиномиальными коэффициентами.* В отличие от случая постоянных коэффициентов, немногое известно о глобальных свойствах общей системы уравнений гипергеометрического типа.

Монодромия многозначной аналитической функции характеризует ветвление этой функции на множестве ее особенностей. Понятие монодромии является центральным в нескольких классических проблемах (включая 21-ю проблему Гильберта) и играет важную роль во многих недоказанных гипотезах.

Основной целью представляемого проекта исследований является вычисление группы монодромии общей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Пьер Делинь заложил основы современных методов исследования монодромии гипергеометрических дифференциальных уравнений в своих работах о гипергеметрических функциях и ветвящихся интегралах. К числу нерешенных проблем о монодромии относится, например, гипотеза Каттани-Дикенштейн-Штурмфельса, утверждающая, что класс рациональных конфигураций Гельфанда-Капранова-Зелевинского совпадает с классом так называемых существенных конфигураций Кэли.

Опишем основные объекты изучения в предлагаемой программе исследований. Мы будем иметь дело с двумя наборами переменных и обозначим через D_n алгебру Вейля с порождающими $x_1, \ldots, x_n$, $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$, а через D_m – алгебру Вейля с порождающими $y_1, \ldots, y_m$, $\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_m}$. Пусть $\theta_{x_j} = x_j \partial_{x_j}$ для $1 \leq j \leq n$, и положим $\theta_{y_i} = y_i \partial_{y_i}$, для $1 \leq i \leq m$. Пусть $\theta_x = (\theta_{x_1}, \ldots, \theta_{x_n})$ и $\theta_y = (\theta_{y_1}, \ldots, \theta_{y_m})$.

Зафиксируем матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{(n-m)\times n}$ ранга $n-m$, первой строкой которой является вектор $(1, \ldots, 1)$, и матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{Z}^{n\times m} = (b_{ji})$ ранга m, такую, что $A \cdot \mathcal{B} = 0$. Для $1 \leq j \leq m$ обозначим через $b_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jm}) \in \mathbb{Z}^m$ j-ю строку матрицы $\mathcal{B}$. Обозначим через g (положительный) наибольший общий делитель максимальных миноров матрицы $\mathcal{B}$.

Для $i = 1, \ldots, m$ и фиксированного вектора $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\boldsymbol{P}_i = \prod_{b_{ji}<0} \prod_{l=0}^{|b_{ji}|-1} (b_j \cdot \theta_y + c_j - l), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{Q}_i = \prod_{b_{ji}>0} \prod_{l=0}^{b_{ji}-1} (b_j \cdot \theta_y + c_j - l), \text{ и} \tag{4}$$

$$H_i = \boldsymbol{Q}_i - y_i \boldsymbol{P}_i, \tag{5}$$

где $b_j \cdot \theta_y = \sum_{k=1}^m b_{jk}\theta_{y_k}$. Операторы H_i называются *операторами Горна,* соответствующими решетке $L_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B} \cdot z : z \in \mathbb{Z}^m\}$ и вектору параметров c. Обозначим через $d_i = \sum_{b_{ij}>0} b_{ij} = -\sum_{b_{ij}<0} b_{ij}$ порядок оператора H_i.

Определение 1. *Системой Горна* называется следующий левый идеал в алгебре Вейля D_m:

$$\mathrm{Horn}\,(\mathcal{B}, c) = \langle H_1, \ldots, H_m \rangle \subseteq D_m.$$

Обозначим через $b^{(i)}$ столбцы матрицы $\mathcal{B}$. Любой вектор $u \in \mathbb{R}^n$ может быть записан в виде $u = u_+ - u_-$, где $(u_+)_i = \max(u_i, 0)$ и $(u_-)_i = -\min(u_i, 0)$. Для $i = 1, \ldots, m$ положим

$$T_i = \partial_x^{b_+^{(i)}} - \partial_x^{b_-^{(i)}},$$

где $\partial_x^v = \partial_{x_1}^{v_1} \cdots \partial_{x_n}^{v_n}$. Для любого $u \in L_{\mathcal{B}}$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$T_u = \partial_x^{u_+} - \partial_x^{u_-}.$$

Эти операторы называются *решеточными операторами,* соответствующими $L_{\mathcal{B}}$.

Определение 2. *Решеточным идеалом,* соответствующим решетке $L_{\mathcal{B}}$, называется идеал

$$I_{\mathcal{B}} = \langle T_u : u \in L_{\mathcal{B}} \rangle \subseteq \mathbb{C}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}].$$

Напомним, что *торическим идеалом,* соответствующим матрице A, называется идеал

$$I_A = \langle T_u : u \in \ker_{\mathbb{Z}}(A) \rangle \subseteq \mathbb{C}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}].$$

Мы будем использовать обозначение

$$I = \langle T_1, \ldots, T_m \rangle \subseteq \mathbb{C}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}].$$

Идеал I называется *базовым решеточным идеалом.* Заметим, что при $m = 2$ идеал I задает полное пересечение. Это, вообще говоря, не так при $m > 2$.

Идеал I_A и вектор параметров естественным образом задают систему линейных дифференциальных уравнений. Эта система называется *A-гипергеометрической системой с параметром $A \cdot c$* и определяется следующим образом:

$$H_A(A \cdot c) = I_A + \langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \partial_{x_j} - (A \cdot c)_i : i = 1, \ldots, n - m \rangle \subseteq D_n.$$

Мы будем использовать обозначение $\langle A \cdot \theta - A \cdot c \rangle$ для $\langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \partial_{x_j} - (A \cdot c)_i : i = 1, \ldots, n - m \rangle$.

A-гипергеометрические системы были впервые рассмотрены Гельфандом, Граевым и Зелевинским в работе [8] и систематически изучены Гельфандом, Капрановым и Зелевинским (см., например, [9]). Сайто, Штурмфельс и Такаяма использовали деформации Гребнера в алгебре Вейля для изучения таких систем (см. [15]).

Хорошо известна связь между свойствами решений регулярного голономного идеала и монодромией соответствующей системы уравнений. Тривиальность монодромии означает наличие фундаментальной системы мероморфных решений; конечная монодромия соответствует алгебраическому базису в пространстве решений, в то время как приводимость монодромии обыкновенного дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами означает, что его можно разложить на множители.

Монодромия обыкновенного гипергеометрического дифференциального уравнения произвольного порядка была вычислена Бейкерсом и Хекманом в работе [4] в терминах групп Шеффарда-Тодда. Монодромия весьма частных случаев гипергеометрических идеалов, порожденных операторами низкого порядка в двух или трех переменных вычислена в работах [10, 11]. Монодромия гипергеометрических идеалов с базисом алгебраических решений изучалась в работах [12] и [16]. Монодромия A-гипергеометрических систем рассматривалась в [17]. Однако, несмотря на свою важность, проблема вычисления группы монодромии общей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений в частных производных остается нерешенной.

Ожидаемые результаты исследований:

Теорема 3. *Любое решение гипергеометрической системы общего положения в виде ряда Пюизо с центром в нуле либо имеет полный носитель либо является устойчивым многочленом Пюизо.*

Теорема 4. *Множество носителей решений гипергеометрической системы общего положения состоит из носителей решений ассоциированных с ней атомарных систем. В частности, начальные экспоненты многочленов Пюизо, удовлетворяющих такой системе уравнений, есть начальные экспоненты многочленов Пюизо, являющихся решениями соответствующих атомарных систем.*

Теорема 5. *Любая симплициальная или параллелепипедная гипергеометрическая конфигурация допускает базис в виде многочленов Пюизо для подходящих значений ее параметров. В частности, пространство решений соответствующей системы уравнений есть прямая сумма одномерных инвариантных подпространств. Представление монодромии такой системы всегда приводимо.*

Теорема 6. *Представление монодромии двумерной гипергеометрической системы общего положения без устойчивых полиномиальных решений завсит лишь от значений ее параметров по модулю целочисленной решетки.*

Планируется также получение теорем, дающих необходимые и/или достаточные условия тривиальности, конечности или приводимости монодромии гипергеометрических систем. Еще одной целью исследований является разложение пространства решений регулярного голономного гипергеометрического идеала в прямую сумму инвариантных относительно действия монодромии подпространств и описание гипергеометрических идеалов с неприводимой монодромией.

В частности, описание класса гипергеометрических идеалов с тривиальной монодромией позволит доказать гипотезу Каттани-Дикенштейн-Штурмфельса.

За последнее время мною и моими соавторами получено несколько результатов о монодромии гипергеометрических систем. В частности, доказаны следующие теоремы (см. [7],[2] and [14]).

Теорема 7. *Число линейных подпространств пространства решений гипергеометрической системы, инвариантных относительно действия монодромии, не меньше дефекта соответствующего торического идеала. Последний может быть вычислен явно в комбинаторных терминах.*

Теорема 8. *Система Горна в двух переменных с параметрами общего положения является голономной.*

Определение 9. В случае $m = 2$ положим

$$\nu_{ij} = \begin{cases} \min(|b_{i1}b_{j2}|, |b_{j1}b_{i2}|), & \text{для } b_i,\ b_j \text{ в открытых противоположных квадрантах } \mathbb{Z}^2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

для $1 \leq i, j \leq n$. Число ν_{ij} называется *индексом,* ассоциированным с b_i и b_j.

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{B}$ – это $n\times 2$ целочисленная матрица максимального ранга, такая, что ее строки $b_1,\ldots,b_n$ удовлетворяют соотношению $b_1+\cdots+b_n=0$. Для вектора $c\in\mathbb{C}^n$ общего положения идеалы* $\mathrm{Horn}\,(\mathcal{B},c)$ *и* $H_{\mathcal{B}}(c)$ *являются голономными. Более того,*

$$\mathrm{rank}\,(H_{\mathcal{B}}(c))=\mathrm{rank}\,(\mathrm{Horn}\,(\mathcal{B},c))=d_1d_2-\sum_{\substack{b_i,\,b_j\\ \text{лин. завис.}}}\nu_{ij}\;=\;g\cdot\mathrm{vol}\,(A)+\sum_{\substack{b_i,\,b_j\\ \text{лин. независ.}}}\nu_{ij}\ ,$$

где в первой сумме суммирование производится по всевозможным линейно зависимым парам b_i, b_j строк матрицы $\mathcal{B}$, лежащих во внутренностях противоположных квадрантах решетки $\mathbb{Z}^2$, а во второй сумме суммирование производится по всевозможным зависимым парам с этим свойством.

Теорема 11. *Монодромия системы Меллина всегда приводима. Размерность пространства ее алгебраических решений может быть вычислена явно в комбинаторных терминах.*

Под *дискретным вариантом проблемы Римана-Гильберта* мы будем понимать следующую задачу: пусть $S\subset\mathbb{P}$ – конечное множество с $m+1$ элементами, E – другое конечное множество и $F_m\cong\pi_1(\mathbb{P}\setminus S)\to\mathrm{Aut}(E)$ – гомоморфизм в группу перестановок элементов E. Здесь F_m – свободная группа с m порождающими. Предположим, что образ F_m действует транзитивно на E, то есть для любых $a,b\in E$ найдется перестановка в образе F_m, отображающая a в b. Всегда ли можно отождествить элементы E с ростками голоморфных функций в некоторой точке $\mathbb{P}\setminus S$ так, чтобы линейная оболочка E совпадала с пространством решений однородного фуксова уравнения с особенностями в S и монодромией, совпадающей с заданным гомоморфизмом?

Детские рисунки находятся во взаимно-однозначном соответствии с конечноразветвленными накрытиями $\mathbb{P}$ с ветвлением над $0,1,\infty$ (здесь мы не различаем изоморфные накрытия). Такие накрывающие отображения называются *отображениями Белого* [13]. Детский рисунок есть прообраз отрезка $[0,1]$ в накрывающем пространстве. Его дополнение есть объединение граней, каждая из которых содержит один прообраз бесконечности. Если детский рисунок состоит из v вершин, e ребер, и f граней, то $v-e+f$ есть Эйлерова характеристика накрывающего пространства. Под плоским деревом понимается дерево с заданным циклическим порядком ребер в каждой вершине. Классы эквивалентных многочленов Шабата взаимно-однозначно соответствуют классам изоморфных плоских деревьев. (Здесь мы не делаем различия между двумя особенностями многочлена Шабата или двумя способами раскраски вершин детского рисунка.)

Детские рисунки допускают представление в различных алгебраических структурах. Множеству S, наделенному алгебраической структурой, можно сопоставить рисунок, ребрами которого являются точки S, а перестановки соответствуют автоморфизмам структуры. Действительно, детский рисунок задается конечным множеством E и двумя перестановками его элементов, действующими транзитивно на E. Пусть задано множество S и подгруппа группы перестановок элементов S. Предположим, что эта подгруппа состоит из автоморфизмов некоторой алгебраической структуры на S. Тогда представление детского рисунка в данной структуре есть инъекция E в S вместе с продолжением каждой перестановки до автоморфизма S. Нетрудно видеть, что класс плоских деревьев, допускающих одномерные линейные представления, есть класс звезд.

Теорема 12. *Пусть T – плоское дерево. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) T допускает линейное представление размерности не выше двух.

(ii) Проблема Римана-Гильберта для T имеет решение степени не выше двух.

(iii) Проблема Римана-Гильберта для T имеет гипергеометрическое решение степени не выше двух.

(iv) T – звезда, 2-звезда, или цепь.

В заключение несколько слов о моей преподавательской деятельности. Я преподавал в университете Западного Онтарио (Лондон, Канада), в Стокгольмском университете (Швеция) и в Красноярском государственном университете. Я читал лекции по базовым математическим дисциплинам, вел спецкурсы для аспирантов, руководил написанием дипломных и курсовых работ.

В числе прочего, я читал лекции по математическому анализу, топологии, функциональному анализу, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, теории функций нескольких комплексных переменных и теории гомологий.

Список литературы

[1] А. Дикенштейн и Т.М. Садыков. *Алгебраичность решений системы Меллина и ее монодромия.* Доклады РАН 412, (2007), вып. 4, 1 - 3.

[2] А. Дикенштейн и Т.М. Садыков. *Базисы в пространстве решений системы Меллина.* Математический сборник 198, (2007), вып. 9, 59 - 80.

[3] В.П. Паламодов. *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Наука, 1967.

[4] F. Beukers and G. Heckman. *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$, Invent. Math. **95** (1989), 325-354.

[5] E. Cattani, A. Dickenstein and B. Sturmfels, *Rational hypergeometric functions*, Compositio Math. **128** (2001), 217-240.

[6] P. Deligne and G.D. Mostow. *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy.* Publications Mathematiques de l'IHЙS **63** (1986), 5-89.

[7] A. Dickenstein, L. Matusevich and T. Sadykov. *Bivariate hypergeometric D-modules.* Adv. in Math., **196**, no. 1 (2005), 78-123.

[8] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and A. V. Zelevinsky. Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 295(1):14–19, 1987.

[9] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. Hypergeometric functions and toric varieties. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 23(2):12–26, 1989.

[10] M. Kato. *Appell's F_4 with finite irreducible monodromy group*, Kyushu Journal of Mathematics **51:1** (1997).

[11] M. Kato. *Appell's Hypergeometric Systems F_2 with Finite Irreducible Monodromy Groups*, Kyushu Journal of Mathematics **54:2** (2000).

[12] M. Kato and M. Noumi. *Monodromy groups of hypergeometric functions satisfying algebraic equations*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 189-205.

[13] S. K. Lando and A. K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications.* With an appendix by Don B. Zagier. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 141. Low-Dimensional Topology II. Springer-Verlag, 2004.

[14] F. Larusson and T. Sadykov. *Dessins d'enfants and differential equations.* arXiv.math.CV/0607773 (2006), 11 pp.

[15] Mutsumi Saito, Bernd Sturmfels, and Nobuki Takayama. *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[16] S. Tanabe. *Logarithmic vector fields and multiplication table*, math.AG/0602301.

[17] U. Walther. *Duality and monodromy reducibility of A-hypergeometric systems*, arXiv:math.AG/0508622.