2 План исследования

Проведенные исследования

Бильярд Синая. Пусть $0 < \Delta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $T > 0$. Открытый круг радиуса Δ с центром в некоторой точке назовем ее Δ-окрестностью. Определим подмножество $\Omega_\Delta(T)$ в $[0, 2\pi)$, состоящее из углов φ, для которых луч

$$\{(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \,|\, t \geqslant 0\} \tag{1}$$

пересекает Δ-окрестность некоторой целочисленной точки $(m, n) \neq (0, 0)$ из круга

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant T^2\right\}.$$

Обозначим через $G_\Delta(T)$ нормированную меру $\Omega_\Delta(T)$:

$$G_\Delta(T) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{mes} \Omega_\Delta(T) \in [0, 1].$$

В 1918 г. Д. Пойа (см. [10], задача 8.5.239) доказал, что $G_\Delta(T) = 1$ для всех $T \geqslant \Delta^{-1}$. Отвечая на вопрос, поставленный в 1981 г. Я. Г. Синаем, в совместной работе [18] Ф. П. Бока, Р. Н. Гологан и А. Захареску доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $T \in [0, \Delta^{-1}]$

$$G_\Delta(T) = \int_0^{\Delta \cdot T} \sigma(t)\,dt + O_\varepsilon(\Delta^{1/8-\varepsilon}), \tag{2}$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{12}{\pi^2}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(1 - \log\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right), & \text{если } \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Величину $G_\Delta(T)$ можно интерпретировать как функцию распределения длин свободного пробега частиц, движущихся прямолинейно из начала координат до первого попадания в Δ-окрестность некоторой ненулевой целочисленной точки. Речь идет об однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”.

С физической точки зрения более интересной представляется следующая общая задача. Пусть $(m, n) = (m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi)) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — центр первой Δ-окрестности, в которую попадет луч (1). Обозначим через $T_\Delta(\varphi)$ расстояние от начала координат до $M_\Delta(\varphi)$ — проекции точки $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ на луч (1). Введем также величину $U_\Delta(\varphi) \in [-\Delta, \Delta]$, которая по абсолютной величине совпадает с расстоянием от $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ до $M_\Delta(\varphi)$. При этом $U_\Delta(\varphi) > 0$ ($U_\Delta(\varphi) < 0$), если при движении частицы по лучу (1) точка $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ остается справа (слева). Удобно рассматривать нормированные значения этих величин:

$$t_\Delta(\varphi) = \Delta \cdot T_\Delta(\varphi) \in [0, 1], \qquad u_\Delta(\varphi) = \Delta^{-1} \cdot U_\Delta(\varphi) \in [-1, 1].$$

Ориентируясь на терминологию из ядерной физики, $u_\Delta(\varphi)$ можно назвать нормированным прицельным параметром, а $t_\Delta(\varphi)$ — нормированным свободным пробегом.

Пусть $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1$. Как обычно, $\chi_I(\ldots)$ — характеристическая функция промежутка I на вещественной прямой. В статье [7] доказан следующий результат.

При любом $\varepsilon > 0$ равномерно по t_0, u_1, u_2 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ для функции распределения

$$\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta; \varphi_0, t_0, u_1, u_2) = \int_0^{\varphi_0} \chi_{[0,t_0]}(t_\Delta(\varphi))\chi_{[u_1,u_2]}(u_\Delta(\varphi))\,d\varphi$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(\Delta) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^{t_0}\int_{u_1}^{u_2} \rho(\varphi, t, u)\,d\varphi\,dt\,du + O_\varepsilon(\Delta^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\Delta \to 0$ и

$$\rho(\varphi, t, u) = \rho(t, u) = \begin{cases} \frac{6}{\pi^2}, & \text{если } |u| \leqslant \frac{1}{t} - 1; \\ \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{|u|} \left(\frac{1}{t} - 1 \right), & \text{если } |u| > \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$$

В частности, если положить $\varphi_0 = 2\pi$, а также $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$, то получим уточнение остаточного члена в асимптотической формуле (2), доказанной в работе [18].

Эргодичность модели "Периодический газ Лоренца" была доказана Я. Г. Синаем [16]. Ему же принадлежит постановка рассматриваемой задачи в простейшем варианте ($\nu = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $\varphi_0 = 2\pi$).

Можно рассмотреть неоднородную задачу, когда траектория частицы начинается не в целочисленной точке, а в ее Δ-окрестности и вылетает с начальным прицельным параметром $\Delta \cdot \nu$, где $|\nu| < c < 1$. Такая ситуация возникает после первого рассеяния частицы в Δ-окрестности некоторого узла решетки.

В работе [8] Быковским и Устиновым было доказано, что при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по t_0, u_1, u_2 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ для аналогично определенной функции распределения $\Phi_\nu(\Delta) = \Phi_\nu(\Delta; \varphi_0, t_0, u_1, u_2)$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_\nu(\Delta) = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{t_0} \int_{u_1}^{u_2} \rho(\varphi, t, u, \nu) d\varphi\, dt\, du + O_{c,\varepsilon}(\Delta^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\Delta \to 0$ и $\rho(\varphi, t, u, \nu) = \rho(t, u, \nu)$ — функция, удовлетворяющая соотношениям $\rho(t, u, \nu) = \rho(t, \nu, u) = \rho(t, -u, -\nu)$, а при $u + \nu \geqslant 0$, $u \geqslant \nu$ определенная равенствами

$$\rho(t, u, \nu) = \begin{cases} \frac{6}{\pi^2}, & \text{если } u \leqslant \frac{1}{t} - 1; \\ \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{u-\nu} \left(\frac{1}{t} - 1 - \nu \right), & \text{если } \nu \leqslant \frac{1}{t} - 1 \leqslant u; \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$$

Из результатов недавней работы [27], доказанных эргодическими методами, основанными на теореме Ратнер о классификации инвариантных эргодических мер под действием унипотентных потоков, следует существование предела функции $\Phi_\nu(\Delta)$ при $\Delta \to 0$ в частном случае с $\varphi_0 = 2\pi$. Более того, в этой статье аналогичный результат доказан и в случае произвольной размерности.

Статистический анализ алгоритма Евклида. Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [9, разд. 4.5.3]). Если на вход алгоритма подается пара натуральных чисел c и d ($c < d$), то основной интерес представляет число выполняемых делений с остатком, которое совпадает с $s(c/d)$ — количеством неполных частных в цепной дроби

$$c/d = [0; t_1, \ldots, t_s].$$

Впервые вопрос о поведении величины $s(c/d)$ в среднем был исследован Хейльбронном. В 1968 г. он (см. [23]) доказал асимптотическую формулу

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leqslant c \leqslant d \\ (c,d)=1}} s(c/d) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log d + O(\log^4 \log d).$$

Позднее Портер (см. [28]) для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leqslant c \leqslant d \\ (c,d)=1}} s(c/d) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log d + C_P + O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}),$$

где ε — любое положительное и C_P— константа, получившая название константы Портера.

В то же время для дисперсии величины $s(c/d)$ (при фиксированном d) известна лишь правильная с точностью до константы оценка, принадлежащая Быковскому [6]:

$$\frac{1}{d}\sum_{c=1}^{d}\left(s\left(\frac{c}{d}\right)-\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d\right)^2 \ll \log d.$$

Она получена методами аналитической теории чисел, опирающимися на оценки сумм Клостермана.

Отдельно изучается задача о поведении $s(c/d)$, когда $1 \leqslant c \leqslant d \leqslant R$ $(R \to \infty)$. Рассмотрим среднее значение числа шагов в алгоритме Евклида

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)}\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d} s(c/d)$$

и дисперсию

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)}\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d} (s(c/d)-E(R))^2.$$

Очевидно, из результата Портера следует равенство

$$E(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot \log R + E_0 + O_\varepsilon(R^{-1/6+\varepsilon}) \tag{3}$$

с вычисляемой явно константой E_0. Однако, при усреднении по обоим параметрам c и d естественно надеяться на более точные результаты. Хенсли в статье [24] вероятностными методами доказал, что разность между величиной $s(a/b)$ и ее средним значением асимптотически имеет нормальное распределение. Кроме того, Хенсли доказал асимптотическую формулу для дисперсии величины $s(c/d)$:

$$D(R) = D_1 \cdot \log R + o(\log R)$$

с абсолютной константой D_1. Позднее Валле [30] для дисперсии с помощью эргодической теории была доказана двучленная асимптотическая формула со степенным понижением в остаточном члене

$$D(R) = D_1 \cdot \log R + D_0 + O(R^{-\gamma}), \tag{4}$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Аналогичные равенства были доказаны и для моментов более высокого порядка (см. [17]).

В работах [14, 15] для математического ожидания доказывается асимптотическая формула с лучшим, чем в (3), понижением в остаточном члене:

$$E(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot \log R + E_0 + O(R^{-1}\log^5 R).$$

Там же доказана двучленная асимптотическая формула для дисперсии

$$D(R) = D_1 \cdot \log R + D_0 + O_\varepsilon(R^{-1/4+\varepsilon}). \tag{5}$$

Отметим, что в соответствующем результате (4) работы [17] утверждается лишь существование некоторой константы $\gamma > 0$; равенство (5) показывает, что в качестве γ можно брать любое число, меньшее $1/4$.

По мнению разных авторов, константа D_1 (которую называют константой Хенсли) не выражается в терминах известных арифметических постоянных (см. [21, 26]). Нахождение её числового значения представляет собой отдельную задачу (см. [19, 22, 29]). Известен полиномиальный алгоритм вычисления D_1, то есть алгоритм, который выдает первые d цифр за $O(d^r)$ арифметических операций (см. [25, 26]). Доказательство равенства (5) дает новую явную формулу для вычисления D_1 (в цитированных работах алгоритмы основаны на вычислении спектра специального оператора). Этот результат может быть также использован и для нахождения константы D_0, для которой в настоящее время не известно численного значения.

Для иррационального $\alpha \in [0,1]$ аналогом длины разложения в цепную дробь можно считать величину

$$E(\alpha, R) = \#\{j \geqslant 1 : Q_j(\alpha) \leqslant R\},$$

где $Q_j(\alpha)$ — знаменатель j-ой подходящей дроби к числу α. В работе [13] рассмотрены среднее значение $E(\alpha, R)$

$$\widetilde{E}(R) = \int_0^1 E(\alpha, R) d\alpha$$

и дисперсия

$$\widetilde{D}(R) = \int_0^1 (E(\alpha, R) - \widetilde{E}(R))^2 d\alpha = \int_0^1 E^2(\alpha, R) d\alpha - \widetilde{E}^2(R).$$

Для них были доказаны асимптотические формулы с двумя значащими членами и степенными понижениями в остаточных членах:

$$\widetilde{E}(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \cdot \log R + \widetilde{E}_0 + O\left(R^{-1} \cdot \log R\right),$$
$$\widetilde{D}(R) = \widetilde{D}_1 \cdot \log R + \widetilde{D}_0 + O(R^{-1/3} \cdot \log^5 R),$$

где $\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_0$ — абсолютные константы, $\widetilde{D}_1 = D_1$ и $\widetilde{E}_0$ указывается явно.

Статистики Гаусса-Кузьмина для конечных цепных дробей. В книге [4, задача 1993–11] (см. также [5]) В. И. Арнольдом была поставлена задача о статистических свойствах элементов цепных дробей для чисел c/d, когда точки (c, d) лежат внутри круга $c^2+d^2 \leqslant R^2$ или другой расширяющейся области. Там же было сделано предположение, что ответ не зависит от формы области и во всех случаях такой же, как указывает инвариантная мера Гаусса.

Для фиксированного $x \in [0,1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ статистики Гаусса-Кузьмина задаются равенством

$$s^{(x)}(r) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(r), [0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x\}.$$

Аргументы Хейльбронна [23] и Портера [28] позволяют доказать равенство (см. [1])

$$\sum_{1 \leqslant c \leqslant d} s^{(x)}(c/d) = \frac{2\log(1+x)}{\zeta(2)} \cdot d \log d + O(d),$$

равномерное по $x \in [0,1]$. Однако этого результата недостаточно для преодоления главной трудности, которая заключается в том, что в случае произвольной области при фиксированном d переменная c пробегает отрезок, длина которого, в общем случае, не кратна d.

Для сектора $c^2 + d^2 \leqslant R^2$ $(c, d \geqslant 0)$ задача Арнольда была впервые решена Авдеевой и Быковским в работе [3]. Доказательство опиралось на оценки сумм Клостермана и существенно использовало внешнее усреднение по d. Затем в статье [2] Авдеевой была доказана более точная асимптотическая формула

$$\sum_{c^2+d^2 \leqslant R^2} s^{(x)}(c/d) = \frac{3}{\pi} \log(1+x) R^2 \log R + O(R^2),$$

в которой остаточный член на $\sqrt{\log R}$ лучше, чем в [3]. В работе [11] в той же самой задаче была получена асимптотическая формула с двумя значащими членами:

$$\sum_{c^2+d^2 \leqslant R^2} s^{(x)}(c/d) = \frac{3}{\pi} \log(1+x) \cdot R^2 \log R + C_0(x) \cdot R^2 + O(R^{2-\frac{1}{9}} \log^2 R).$$

В [12] рассматрен вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R) = \sum_{(c,d)\in\Omega(R)} s^{(x)}(c/d),$$

где $\Omega(R)$ — область, полученная гомотетией с коэффициентом R ($R \to \infty$) из некоторой фиксированной области Ω_0: $\Omega(R) = R \cdot \Omega_0$. Пусть она задана в полярных координатах

$$\Omega_0 = \{(\rho, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant r(\varphi)\},$$

имеет площадь V_0 и для всех $\varphi \in [0, \pi/4]$ функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям $r(\varphi) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, $r'(\varphi) \leqslant r(\varphi) \operatorname{arctg} \varphi$. Тогда, равномерно по $x \in [0, 1]$,

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)} \cdot \log(x+1) \cdot R^2 \log R + C(x) \cdot R^2 + O(R^{2-\frac{1}{5}} \log^3 R),$$

где $C(x)$ не зависит от R. В частности, этот результат показывает, что главный значащий член в асимптотической формуле пропорционален мере Гаусса и зависит не от формы области Ω_0, а лишь от ее площади V_0. Как следствие получается ответ на вопрос Арнольда: для относительной частоты встречаемости натурального k в качестве неполных частных рассматриваемых цепных дробей выполняется асимптотическое равенство

$$\widetilde{p}_k(R) = \frac{N_{1/k}(R) - N_{1/(k+1)}(R)}{N_1(R)} = p_k + O\left(\frac{1}{\log R}\right),$$

где $p_k = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$ — вероятность появления числа k в качестве неполного частного действительного числа.

Проект будущих исследований

1. Исследовать статистические свойства произвольных (не обязательно начинающихся в окрестности целой точки) траекторий в двумерном бильярде Синая. Применить трехмерную теорию цепных дробей, разработанную Минковским и Вороным, и методы аналитической теории чисел к изучению трехмерного бильярда Синая.
2. Применить метод тригонометрических сумм к доказательству центральной и локальной предельной теорем для числа шагов в алгоритме Евклида.
3. Развить элементарную теорию p-адических цепных дробей. С ее помощью исследовать методами аналитической теории чисел длину работы бинарного алгоритма Евклида (и его вариантов основанных на системах счисления с другими основаниями).
4. Применить спектральную теорию автоморфных форм для уточнения остаточных членов в уже известных результатах.

Преподавательский опыт

1. Ассистент кафедры математики СУНЦ МГУ (1995–2000).
2. Ассистент кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ (1999–2002).
3. Доцент кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ (2002–2006).
4. Доцент кафедры математики СУНЦ МГУ (2005–2006).

Преподаватель летних олимпиадных школ СУНЦ МГУ (2004–2007) и летней научной школы CBOSS-МГУ (2005).

Список литературы

[1] Авдеева М. О. Распределение неполных частных в конечных цепных дробях. — Владивосток: Дальнаука, 2000, препринт ДВО РАН, ХО ИПМ №4.

[2] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей. — *Функц. анализ и его прил.* **38**: 2 (2004), 1–11.

[3] Авдеева М. О., Быковский В. А. *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса-Кузъмина.* — Владивосток, Дальнаука, 2002 (препринт).

[4] Арнольд В. И. *Задачи Арнольда.* — М.: Фазис, 2000.

[5] Арнольд В. И. *Цепные дроби.* — М.: МЦНМО, 2001.

[6] Быковский В. А. Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей. — *ФПМ*, **11**: 6 (2005), 15–26.

[7] Быковский В. А., Устинов А. В Статистика траекторий частиц для однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”. — *Функц. анализ и приложения* (принято в печать).

[8] Быковский В. А., Устинов А. В Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки. — *Известия РАН* (сдано в печать).

[9] Кнут Д. Э. *Искусство программирования, т. 2. Получисленные алгоритмы.* — М., Санкт-Петербург, Киев: Вильямс, 2000.

[10] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*, т. 2, — М.: Наука, 1978.

[11] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.

[12] Устинов А. В. О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей. — *Фунд. и прикл. математика* **11** (2005), 195–208.

[13] Устинов А. В. Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей. — *Мат. сборник*, **198**: 6 (2007), 139—158.

[14] Устинов А. В. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида. — *Материалы IX краевого конкурса молодых ученых*, Хабаровск, ТОГУ (2007), 149–157.

[15] Устинов А. В. Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида. — *Известия РАН* (принято в печать).

[16] Синай Я. Г. Эргодические свойства газа Лоренца. — *Функциональный анализ и его приложения*, т. 13 (1979), вып. 3, с. 46–59.

[17] Baladi V., Vallée B. Euclidean algorithms are Gaussian. — *J. Number Theory*, **110** (2005), 331–386.

[18] Boca F. P., Gologan R. N., Zaharescu A. The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus, *Comm. Math. Phys.*, **240**: 1–2 (2003), 53–73.

[19] Daudé H., Flajolet P., Vallée B. An average-case analysis of the Gaussian algorithm for lattice reduction. — *Combin. Probab. Comput.*, **6** (1997), 397–433.

[20] Dixon J. D. The Number of Steps in the Euclidean Algorithm. — *J. of Number Theory*, **2** (1970), 414–422.

[21] Finch S. R. Continued fraction transformation. — unpublished note (2007), `http://algo.inria.fr/csolve/kz.pdf` .

[22] Flajolet Ph., Vallée B. Continued fractions, comparison algorithms, and fine structure constants. — *Constructive, Experimental et Non-Linear Analysis*, Proceedings of Canadian Mathematical Society, **27** (2000), 53–82.

[23] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. — *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Berlin, VEB (1968), 89–96.

[24] Hensley D. The Number of Steps in the Euclidean Algorithm. — *J. of Number Theory*, **49** (1994), 142–182.

[25] Lhote L. *Modélisation et approximation de sources complexes.* — Masters thesis, University of Caen (2002).

[26] Lhote L. Computation of a class of continued fraction constants. — *Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO)*, Proc. 2004 New Orleans workshop.

[27] Marklof J., Strömbergsson A. The distribution of free path lengths in the periodic Lorentz gas and related lattice point problems. — arXiv:math/0706.4395v1.

[28] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn. — *Mathematika*, **22**: 1 (1975), 20–28.

[29] Vallée B. Dynamique des fractions continues contraintes priodiques,. — *Journal of Number Theory*, **72**: 2 (1998), 183–235.

[30] Vallée B. A Unifying Framework for the Analysis of a Class of Euclidean Algorithms. — *Proceedings of LATIN'2000*, Lecture Notes in Computer Science 1776, Springer, 343–354.