## От издателя

Настоящим изданием Независимый Московский Университет начинает публикацию перевода труда Александра Гротендика «Recoltes et Semailles». Эта книга вышла в 1986 году в качестве препринта Университета Монпелье и состояла из следующих частей:

Прелюдия в четырех частях (Вместо предисловия; Прогулка по творческому пути, или дитя и Мать; Письмо; Введение).

Самодовольство и обновление.

Похороны (I), или Платье голого короля.

Похороны (II), или Ключ к Инь и Ян.

Похороны (III), или Четыре действия.

В данный момент у меня нет уверенности, что переводы различных частей будут выходить в естественной последовательности и даже что рано или поздно все они будут опубликованы. Поэтому ссылки на части, перевод которых еще не вышел, даются по страницам французского издания. Я прошу прощения у читателей за возникающие неудобства.

Одно обозначение: на страницах книги множество раз упоминается ее заглавие. В таких случаях употребляется аббревиатура «РС» («Размышления и свидетельства»).

Наконец, я хочу поблагодарить Р. Безрукавникова, Д. Каледина, Л. Посицельского, В. Ретаха и А. Шеня, без чьей помощи русское издание «РС» вряд ли увидело бы свет.

М. Финкельберг

Моим родителям

## Содержание

## Вместо предисловия...

30 января 1986

Мне оставалось только написать предисловие, чтобы затем доверить «РС» печатному станку. Я твердил себе, что приложу все усилия, лишь бы вышло что-нибудь подходящее. Что-нибудь *толковое* на этот раз. Всего три-четыре страницы, но в меру прочувствованные, чтобы представлять следующий за ними огромный «опус». Что-нибудь способное задержать взгляд пресыщенного читателя, заставляя поверить, что вещи интересные (и даже вдруг — кто знает? — относящиеся к нему лично) он обнаружит здесь, не испугавшись труда прочесть «целую тысячу» страниц. Броскость не в моем стиле, совсем нет. Но на этот раз, только однажды, я решил сделать исключение! И вправду нужно, чтобы «издатель, безрассудный настолько, чтобы пуститься в эту авантюру» (опубликовать текст-чудовище, заведомо не годный к печати) пусть с грехом пополам, да покрыл бы свои расходы.

Но нет, случилось по-другому. Я вот именно трудился изо всех сил, и отнюдь не один вечер, как рассчитывал. Завтра груде исписанных листов будет три недели. Результат, уж это точно, не похож на то, что можно было бы не стыдясь назвать «предисловием». Нет, решительно, это снова неудача! В моем возрасте больше работаешь над собой, но все же я устроен не так, чтобы совершать или подготавливать сделки. Даже ради того, чтобы доставить удовольствие (самому себе, или друзьям...).

То, что у меня вышло, оказалось чем-то вроде долгой прогулки, с комментариями по ходу, вдоль творческого пути, моего труда как математика. Предназначена же она главным образом для «непосвященных» — тех, кто «ничего не понимает» в математике. И для меня, я ведь никогда не располагал досугом для такой прогулки. Слово за слово, я поймал себя на том, что тащу на свет божий и выговариваю вещи, прежде всегда почивавшие в области недосказанного. Случайно ли, они-то мне и представляются самыми существенными, как в работе моей, так и в жизни. Кстати, это вещи ни в коей мере не технические. Суди сам, удалась ли мне моя наивная затея «дать им пройти» на виду, опять-таки явно не слишком разумная. Удовлетворение и радость для меня — узнать, что ты их почувствовал. Ведь многие из моих ученых коллег этого попросту не умеют. Может быть, они стали слишком учеными, слишком почтенными. А так зачастую и теряют контакт с вещами простыми и настоящими.

Во время этой «Прогулки по творческому пути» я немного говорю о своей жизни. И совсем чуть-чуть, местами, о самом предмете «РС». Я возвращаюсь к нему в более подробной манере в «Письме» (датированном маем прошлого года), которое следует сразу за «Прогулкой». Это Письмо адресовано моим бывшим ученикам и «прежним друзьям» из мира математики. Но и в нем не содержится ничего технического. Его без затруднений прочтет любой, кому интересно разобраться, имея перед собой рассказ «с натуры», что же в конце концов побудило меня написать «РС». Еще верней, чем Прогулка, Письмо наделит тебя предвкушением близкого знакомства с нравами определенного круга — «высшего света» математики. Оба эти раздела в одинаковой степени дадут тебе представление о моем стиле изложения; он может показаться несколько необычным. И о самом духе, выражением которого служит этот стиль — первый ничуть не в большей мере, чем последний, может рассчитывать на всеобщее одобрение.

В «Прогулке» и понемногу всюду на страницах «РС» я толкую *о математическом труде*. Это работа, с которой я знаком хорошо, и из первых рук. Значительная часть того, что я говорю, справедлива, конечно, для всякого вида творческой активности, для труда открытий. Это все так же верно для так называемого «умственного» труда, того, что делается в первую очередь «головой», с бумагой и пером в руке. Такой труд отмечен зарождением в бутоне и затем, шаг за шагом, расцветом в нас *понимания* того, что мы изучаем. Вот пример из противоположной области — любовная страсть ведь тоже есть страсть к открытию. Она открывает для нас знание, называемое «чувственным», которое так же самообновляется, переживает расцвет, становится глубже и полней. Два этих импульса — тот, каким одержим, скажем, математик за работой, и другой, воодушевляющий влюбленных, гораздо более сродни друг другу, чем обыкновенно подозревают или чем принято допускать. Я желал бы, чтобы страницы «РС» помогли тебе ощутить это родство — в твоей работе и в жизни повседневной.

На протяжении Прогулки прежде всего будет обсуждаться вопрос математического труда как такового. Напротив, в отношении *контекста*, в котором сей труд имеет место, а также *побуждений*, которые вступают в игру во время, свободное от непосредственной работы, я остаюсь практически нем. Тут я рискую придать своей личности — или персоне математика, или ученого вообще — облик, конечно, лестный, но искаженный. Жанр «страсти великой и благородной», и без каких бы то ни было поправок. Все вместе в русле «Мифа о Науке» (попрошу «Н» заглавное!). Миф героический, «прометеевский», в который писатели и ученые бросались (и продолжают бросаться) наперебой. Разве что некоторые историки, быть может, устояли перед соблазном. Правда же заключается в том, что «в науке» среди мотивов, порой побуждающих безрасчетно вкладывать все свои силы в работу, амбиции и тщеславие играют роль столь же важную и почти универсальную, как и в любой другой профессии. Это принимает формы более или менее грубые, подается более или менее тонко, смотря по степени заинтересованности. Я нисколько не претендую составить здесь исключение. Надеюсь, по прочтении моего свидетельства[1] ни у кого не останется сомнений на этот счет.

Верно и то, что честолюбие самое ненасытное все же бессильно найти и сформулировать минимально значимое утверждение в математике или его доказать — совершенно так же, как, например, оно не может «разжечь желание» (в подходящем смысле этого слова). Как у женщин, так и у мужчин то, что «возбуждает страсть», не имеет ничего общего ни с амбицией, ни с желанием блистать, ни со стремлением проявить свою потенцию, половую в данном случае, — как раз напротив! Нет, это пронзительное ощущение чего-то наделенного силой, весьма реального и в то же время хрупкого. Его можно назвать «красотой» — но оно является в тысяче образов. Честолюбие не всегда мешает воспринимать красоту. Но это заведомо *не то*, что делает нас чуткими к ней...

Человек, который первым открыл и подчинил себе огонь, был в точности таким же, как ты и я. И уж совсем не таким, как те, кого воображают себе под именами «героя», «полубога» и прочими в том же роде. Разумеется, как ты и как я, он знавал уколы тревоги и испытанный яд тщеславия, уносивший их из памяти. Но в тот миг, когда он «познал» огонь, с ним не было ни страха, ни тщеславия. Такова правда мифа героического. Этот миф становится безвкусным и слащавым, когда мы используем его, чтобы скрыть от самих себя *другой* аспект действительности — тоже существенный и тоже настоящий.

На страницах «РС» я намеревался обсудить оба аспекта — импульс к познанию и страх вместе с этими пилюлями тщеславия. Думаю, что «понимаю», или по крайней мере *знаю* этот импульс и его природу. (Быть может, в один прекрасный день я вдруг увижу, восхищенный, как беспредельно я обманулся...) Но что до страха и тщеславия, и тех коварных помех творче-

[1] Речь идет о книге в целом — *прим. перев.*

ству, которые ими чинятся, я знаю наверное, что далек от проникновения в суть их великой загадки. И не ведаю, посчастливится ли мне заглянуть в ее тайные глубины за те годы, что осталось прожить...

С течением времени, пока писались «РС», два образа всплыли наружу, чтобы представлять каждый из двух аспектов человеческой деятельности. Это суть *Ребенок* (он же *работник*) и *Хозяин*. В «Прогулке», которая не за горами, говорится почти исключительно о «ребенке». И о нем же речь в подзаголовке «Дитя и мать». Это название станет ясней, я надеюсь, во время Прогулки.

В оставшихся главах раздумий, напротив, ведущая роль на сцене отдана Хозяину. И то — недаром он хозяин! Впрочем, говоря точней, тут не *один* Хозяин, а *несколько* конкурирующих. Но так же верно, что эти Хозяева по сути сходны. И раз уж мы заговорили о Хозяевах, значит, непременно будут ослушники. В первой части раздумий («Самодовольство и Обновление», которая следует сразу за вступительной «Прелюдией в четырех частях»), я и есть главный «ослушник». В последующих трех частях это в основном «другие». Всяк в свой черед!

Надо сказать, что в «РС» помимо самых глубоких философских раздумий и «исповедей» (нимало не покаянных) нет-нет да и встречаются «портреты, писанные серной кислотой» (заимствуя выражение одного из моих коллег и друзей, которому досталось на орехи). Не считая крупномасштабных «боевых действий», притом далеко не традиционного свойства. Робер Жолэн[2] уверял меня (полушутя), что в «РС» я развил «этнологию математического сообщества» (или «социологию» — не знаю, как лучше сказать). Куда как лестно услышать, что, сам того не зная,

[2]Робер Жолэн — мой старинный друг. По моим представлениям, выйдя один на один с узаконенным сводом нравов сообщества этнологического, он поставил себя в положение («белой вороны»), в чем-то сходное с моим противостоянием «высшему свету» в математике.

предавался таким ученым занятиям! Действительно, на страницах Раздумий, посвященных «расследованию», я (не желая того) разоблачил по мере их написания изрядный кусок математического истэблишмента, не считая множества моих коллег и друзей чином поскромнее. И в последние месяцы, с тех пор как я предпринял рассылку предварительного тиража «РС» в прошедшем октябре, фактов прибавилось. Решительно, мое свидетельство вылетело из рук камнем, всполохнувшим пруд. Появились отзвуки вот уж впрямь на все лады (кроме тех, на какие поется скука...). Почти всегда это было совсем не то, чего я ожидал. И было много молчания, весьма красноречивого свойства. Очевидно, мне довелось (и еще предстоит) получить подробное представление, во всех возможных красках, о том, что творится в башке у разных людей — моих ли бывших учеников или других коллег, более или менее прочно устроившихся — виноват, о «социологии математического сообщества», я хотел сказать! За все эти отзывы, прибывшие сейчас и внесшие свой вклад в большой социологический труд моих закатных дней я считаю своим долгом выразить в этих самых строках чувство признательности.

Разумеется, я особенно чувствителен к отзвукам на пылких аккордах. Кроме того, некоторые (немногие) мои коллеги сообщали мне о чувстве или ощущении (до сих пор не находившем выражения) кризиса, или упадка внутри математической среды, к которой они почитают себя принадлежащими.

Вне этой среды в числе первых, кто оказал горячий и даже взволнованный прием моему свидетельству, я хотел бы назвать здесь Сильви и Катрин Шевалле[3], Робера Жолэна, Стефана Делижоржа, Кристиана Буржуа. Если «РС» получили распростра-

[3]Сильви и Катрин Шевалле — вдова и дочь Клода Шевалле, коллеги и друга, которому посвящена центральная часть «РС» (РС III, «Ключ к Инь и Ян»). И на страницах моих раздумий я неоднократно говорю о нем и о той роли, которую он сыграл в выборе моего пути.

нение более широкое, чем первоначальный предварительный тираж (предназначавшийся для весьма ограниченного круга), то это главным образом благодаря им. И прежде всего — их заразительной убежденности в том, что все, что я старался уловить и воплотить в слова, должно быть сказано. И в том, что это могло бы быть услышано в более широком кругу, чем тот, что составляют мои коллеги (зачастую люди раздражительные, даже сварливые, и менее всего способные вдруг в себе усомниться...) Так, Кристиан Буржуа не замедлил взять на себя риск публикации невозможного, а Стефан Делижорж — оказать мне честь, включив мое неудобоваримое свидетельство в сборник «Episteme», бок о бок с (на секундочку) Ньютоном, Кювье и Араго. (О лучшем соседстве я не мог и мечтать!) Каждой и каждому из них, за многократные изъявления сочувствия и доверия, подоспевшие как раз в нелегкую минуту, я счастлив выразить здесь всю меру моей признательности.

Итак, мы отправляемся в Прогулку вдоль перипетий моего труда, как бы во плоти пускаясь в путешествие по жизни. Путешествие долгое, не поспоришь — тысяча страниц да еще сверх того, причем в каждой тесно словам. Я провел за ним жизнь, его не исчерпав, но с каждым годом открывая заново, страницу за страницей. Слова медлили иногда, чтобы потом вернее выжать до капли весь сок пережитого, еще прячась где-то нерешительным намеком на знание — как виноград спелый и крепкий, томимый прессом: на секунду покажется, будто он стремится укрыться от теснящей его силы... Но в те самые мгновения, когда слова как будто бы бьются друг в друга и истекают влагой, они, однако же, повинуются отнюдь не случайности. Каждое из них бывает взвешено при прохождении — иначе слишком поздно — чтобы выйти точь-в-точь в ладу с другими, ни чересчур легким, ни слишком тяжелым. Оттого это раздумье-свидетельство-путешествие не годится для поспешного прочтения, в один ли день или в месяц, читателем, которому не терпелось бы добраться до последнего слова. Ни «заключения», ни «выводов» нет в «РС», как нет их в моей жизни — и в твоей. Есть только вино, что выдерживается в бочонках моего бытия. Последний стакан, который ты выпьешь, не будет лучше, чем первый или сотый. В них все «то же», и все они различны. И если первый стакан испорчен, такова вся бочка; хорошая вода (если есть) лучше плохого вина.

Но хорошее вино не пьют наспех, в один неловкий глоток.

# Прогулка по творческому пути, или дитя и Мать

Январь 1986

## 1.

Когда я был мальчишкой, я очень любил ходить в школу. Один и тот же учитель нам преподавал чтение и письмо, арифметику, пение (он аккомпанировал нам на маленькой скрипке), рассказывал о первобытных людях и о том, как был открыт огонь. Я, сейчас во всяком случае, не припомню, чтобы в школе хоть когда-нибудь было скучно. Там процветала магия чисел, слов, знаков и звуков. И *рифмы* — в песнях и в коротеньких стихотворениях. В рифме, казалось, есть тайна, и такая, что словами не перескажешь. Так было, пока кто-то мне не объяснил, что есть «трюк», весьма нехитрый: чтобы вышло в рифму, нужно просто-напросто две фразы подряд закончить на один и тот же слог — тут же разом, как по волшебству, получаешь *стих*. Это было откровением! В доме, где мне было с кем поделиться находкой, неделями и месяцами я развлекался сочинением стихов. Какое-то время я не мог говорить иначе, как в рифму. К счастью, это прошло. Но даже сейчас я, случается, берусь за стихосложение, хоть и не трачу более сил в погоне за рифмой, если она не приходит сама по себе.

В другой раз приятель постарше, который уже ходил в лицей, рассказал мне об отрицательных числах. Это стало новой игрой, довольно занятной, но вскоре себя исчерпавшей. И еще были кроссворды: я проводил дни и недели за их составлением, добиваясь все большего числа самопересечений. В этой игре магия формы сочеталась с магией знаков и слов. Но и эта страсть меня покинула, не оставив видимых следов.

В лицее, в Германии в начале первого года, затем во Франции, я был хорошим учеником, но никогда — «блестящим». Я с головой уходил во все, что мне было интересно, имея в то же время склонность пренебрегать тем, что занимало меня меньше, не слишком при этом заботясь об одобрении соответствующего преподавателя. В первый год моего обучения во французском лицее, 1940, я был вместе с моей матерью заключен в концентрационный лагерь в Риекро, неподалеку от Ма́нда. Была война, мы были иностранцы — «нежелательный элемент», как тогда говорили. Но администрация лагеря за подростками, как бы те ни были «нежелательны», следила сквозь пальцы. Они в какой-то степени могли входить и выходить из лагеря, когда хотели. Я был старше и единственный, кому нужно было ходить в лицей, за четыре-пять километров от лагеря, хоть в снег, хоть в ветер, в каких-нибудь случайных ботинках, вечно пропускавших воду.

Припоминаю еще первое «математическое изложение», когда учитель влепил мне низкий балл за доказательство одного из «трех признаков равенства треугольников». Мое доказательство не было взято из учебника, букве которого он набожно следовал на своих уроках. И все же я знаю наверное, что оно было ни более, ни менее убедительным, чем в книжке, и даже близким по духу — с бесконечными «совместим данные фигуры таким образом, чтобы...» Очевидно, человек, меня обучавший, не был уверен в себе и своих знаниях настолько, чтобы судить самостоятельно (в данном случае об обоснованности рассуждения). Ему приходилось опираться на авторитет — например, книги, как в этот раз. Верно, все это меня тогда поразило, раз я запомнил это мелкое происшествие. Впоследствии и еще до сих пор мне не раз доводилось убеждаться в том, что подобный подход — не только не исключение (отнюдь!), но правило едва ли не из самых распространенных. Тему эту трудно исчерпать; я не один раз ее касаюсь так или иначе на страницах «РС». Но и по сей день, хочу я того или нет, я всякий раз теряюсь, столкнувшись с ней заново...

Последние годы войны, в то время как моя мать оставалась интернированной в лагере, я провел в детском доме «Швейцарской помощи» для детей-беженцев, в Шамбо на Линьоне. В основном там были евреи; когда нас предупреждали (местные власти) о грозящем налете Гестапо, мы уходили маленькими группками по два или три человека на одну-две ночи укрыться в лес, не слишком отдавая себе отчет в том, что речь здесь идет о нашей шкуре. Вся область тогда кишела евреями, которые прятались в диких уголках севеннского края, и выжили в основном благодаря помощи местного населения.

Поражало меня в «Севеннском колледже» (где я учился) прежде всего то, насколько мало моих товарищей интересовало все, чему их обучали. Что до меня, я жадно набрасывался на школьные книги в начале учебного года, надеясь на этот раз добраться до вещей *действительно* интересных; остаток же года я проводил наилучшим для себя образом, в то время как предвосхищенная программа неумолимо излагалась целыми триместрами. При всем том попадались иногда преподаватели на редкость приятные. Преподаватель естественной истории, месье Фридель, был человеком замечательного ума и редких душевных качеств. Но он не умел «свирепствовать», так что на его уроках шумели до погибели; к концу года становилось невозможно разобрать что бы то ни было — звук его голоса тонул в общем гвалте. Потому-то, быть может, я и не стал биологом!

Я недурно проводил время, даже во время уроков (тс-с...), решая математические задачки. Скоро те, что я находил в учебнике, перестали меня удовлетворять. Может быть, потому, что чем дальше в лес, тем ясней проявлялась у них тенденция как-то уж чересчур смахивать друг на друга — но еще более потому, что они словно бы падали с неба одна за другой, длинной вереницей, не извещая, откуда они взялись и куда направляются. Трудности в задачах были книжные, а не *мои*. И все же в вопросах настоящих, не надуманных, не было недостатка.

Так, если заданы длины $a$, $b$, $c$ трех сторон треугольника, задан и сам треугольник (с точностью до его расположения), а значит, должна существовать точная «формула», которая выводила бы, например, площадь треугольника как функцию $a$, $b$, $c$. Точно так же, если известны длины всех шести ребер тетраэдра — каков его объем? Над этим, думается, я долго бился, но достиг желаемого в конце концов. Во всяком случае, когда что-то меня «захватывало», я не считал ни часов, ни дней, пробегавших мимо, забывая обо всем остальном! (Да и сейчас со мной это так...)

То, что меня меньше всего устраивало в наших учебниках математики — это полное отсутствие сколько-нибудь серьезного определения понятия длины (кривой), площади (поверхности), объема (тела). Я дал себе обещание, как только появится досуг, заполнить эти пробелы. Я вкладывал в это основную долю моей энергии от 1945 до 1948 года, будучи в то же время студентом Университета Монпелье. Курсы на факультете были составлены не так, чтобы я мог ими довольствоваться. Ни разу не сказав себе этого ясно, я стал чувствовать, что профессора ограничивались повторением своих учебников, точь-в-точь как мой учитель математики в лицее в Ма́нде. И потому я появлялся в университете только изредка, чтобы держаться в курсе этой вечной «программы». Книг с лихвой хватало, чтобы не испытывать нужды в посещении лекций, но вместе с тем они явно ни в малейшей степени не годились для того, чтобы отвечать на возникавшие у меня вопросы. По правде сказать, они даже не *замечали* этих вопросов, как не замечали их мои лицейские учебники. При том, что они давали первому встречному правила вычисления длин, площадей и объемов, вкупе с интегралами простыми, двойными, тройными (высшие размерности с осторожностью избегались), вопрос о настоящем определении, казалось, не вставал ни перед моими профессорами, ни перед авторами пособий.

В соответствии с моим тогдашним ограниченным опытом вполне могло показаться, что я один на всем свете наделен любопытством к математическим вопросам. Во всяком случае, на протяжении тех лет, проведенных в полнейшем интеллектуальном одиночестве, я думал именно так, нимало о том не тревожась[4]. По правде говоря, я думаю даже, что в ту пору ничуть не стремился углубиться в исследование вопроса о том, был я или не был единственным человеком в мире, способным заинтересоваться тем, чем я занимался. Моя энергия в достаточной мере уходила на то, чтобы держать пари, которое я сам с собой заключил: разработать теорию, которая бы всем моим требованиям удовлетворяла.

Я нисколько не сомневался в том, что мне удастся добраться до сути вещей, хотя бы только потому, что дал себе труд, глубоко вникнув, подставить ухо и записывать черным по белому все, что мне говорилось, по мере того как слова звучали ясней. Интуиция в отношении *объема*, скажем, была неопровержимой.

[4]Между 1945 и 1948 годами мы с матерью жили в маленькой деревушке Мераргю (неподалеку от Вераргю), затерянной среди виноградников, в десяти километрах от Монпелье. (Мой отец погиб в Освенциме в 1942 г.) Чтобы сводить концы с концами, я участвовал каждый год в сборе винограда, а после из того, что было забыто на лозе, делал вино, которое и продавал кое-как (кажется, в нарушение действовавших тогда законов). Кроме того, рядом был сад, который, хоть никто за ним и не ухаживал, в изобилии поставлял нам фиги, шпинат и даже (под конец) помидоры, посаженные любезным соседом на острове в море великолепных маков. То была красивая жизнь, но не без ям на дороге — когда нужно было заменить оправу очков или ботинки, изношенные до нитки. К счастью, моя мать, ослабленная и больная вследствие долгого пребывания в лагерях, имела право на бесплатную медицинскую помощь. У нас ни за что не достало бы денег на лечение…

Она не могла быть ничем иным, как отражением *действительности*, подчас ускользающей, но совершенно надежной и настоящей. Вот эту самую действительность и требовалось уловить — наверное, как ту волшебную сущность рифмы, схваченную и «понятую» в один прекрасный день.

Когда я приступал к этому, семнадцати лет от роду и едва закончив лицей, то думал, что работа займет несколько недель. Я застрял на три года. В итоге я умудрился даже завалить в конце второго курса экзамен по сферической тригонометрии (с «углубленным астрономическим уклоном», sic) из-за дурацкой ошибки в счете. (Я никогда не был особенно силен в вычислениях, с тех пор как вышел из лицея...) В связи с этим мне пришлось, чтобы закончить свой диплом, остаться на третий год в Монпелье вместо того, чтобы тотчас же ехать в Париж — только там, как меня уверяли, мне выпадет случай повстречать людей, которые были бы в курсе всего, что считается существенным в математике. Месье Сула — тот, кто мне все это рассказывал — убеждал меня также, что последние проблемы, которые еще поднимались в математике, были разрешены двадцать или тридцать лет назад неким Лебегом. Он разработал как раз (решительно, удивительное совпадение!) теорию меры и интегрирования, чем и поставил завершающую точку в математике.

Месье Сула, мой профессор «дифференциального исчисления», был человеком доброжелательным и хорошо ко мне относился. Не думаю, чтобы он сколько-нибудь меня разуверил. Должно быть, во мне уже поселилось предвидение того, что математика есть нечто беспредельное по глубине и широте. Есть ли у моря «завершающая точка»? Во всяком случае, мне и в голову не приходило, что я должен пойти разыскать книгу этого Лебега, о которой говорил мне месье Сула, хотя сам и не держал никогда ее в руках. По моим представлениям, между тем, что могло содержаться в книге, и той работой, которую делал *я, по-своему,* чтобы удовлетворить свое любопытство по поводу вещей, меня занимавших, не было ничего общего.

## 2.

Когда, год или два спустя, я наконец установил связь с математическим обществом в Париже, я узнал среди многого другого, что труд, завершенный мною в моем углу, своими силами и подручными средствами, представлял собой (за небольшим только исключением) нечто, прекрасно известное «всему миру» под названием «Лебеговской теории меры и интеграла». В глазах двух или трех старших математиков, с которыми я говорил об этой работе (и даже показывал рукопись) это было немного похоже попросту на потерю времени, переоткрытие «уже известного». Не припомню, впрочем, чтобы я был разочарован. В ту пору идея заслужить «признание», в виде одобрения или хотя бы интереса других людей к тому, чем я занимался, была еще чужда мне по духу. Кроме того, моя энергия в достаточной мере уходила на освоение в совершенно новой среде, и в первую очередь на изучение того, что в Париже считалось азбукой для математика[5].

Однако, вспоминая сейчас эти три года, я прихожу к выводу, что они отнюдь не были растрачены понапрасну. Сам того не зная, тогда, в одиночестве, я научился тому, что составляет суть математического ремесла, и чего заведомо не смог бы преподать мне ни один мастер. При том, что никто мне этого не говорил, при том, что я ни разу не встретил никого, кто делил бы со мной жажду знаний я все же понял «нутром», так сказать, что я — математик: тот, кто занимается математикой, в полном смысле этого слова, так, как «занимаются» любовью.

[5]Я поместил короткий рассказ об этом периоде перехода, довольно трудном, в первой части «РС», в разделе «Желанный иностранец».

Математика стала для меня возлюбленной, всегда благосклонной к моим желаниям. Эти годы одиночества заложили основу веры в себя, которая никогда потом не была поколеблена — ни когда я обнаружил (по прибытии в Париж, двадцати лет от роду) всю глубину моего невежества и беспредельность того, что мне предстояло изучить, ни (двадцатью годами позже) бурными событиями, связанными с моим безвозвратным уходом из математического общества, ни, в эти последние годы, эпизодами подчас нелепыми до безумия — неких «Похорон» (преждевременных, но чисто разыгранных) моих собственных и моего труда, устроенных моими же, в прошлом, ближайшими товарищами...

Иначе говоря, я научился в эти решающие для меня годы *быть один*[6]. То есть к тому, что хочешь понять, подходить со своей лучиной, не доверяя представлениям, вслух или по умолчанию общепринятым среди более или менее обширной группы, к которой и я чувствовал себя принадлежащим, — или бывших для меня авторитетными по каким-либо другим причинам. Общее согласие утверждало без слов, (как в лицее, так и в университете), что нет оснований ставить вопрос о самом понятии «объема» — это, дескать, нечто «хорошо известное», «очевидное», «без проблем». Я, не задумываясь, сделал шаг сквозь невидимую преграду, и он удался, как нечто само собой разумеющееся. Так же, должно быть, поступил несколькими десятиле-

[6]Это несколько неточная формулировка. Я не мог «научиться быть один» по той простой причине, что я никогда и не *разучивался*; в детстве эта способность была со мной — с рождения, как и со всяким другим ребенком. Но три года уединенного труда, когда я смог дать самому себе оценку, исходя из моих собственных внутренних критериев, подтвердили и обновили во мне, по отношению к математическим занятиям на этот раз, основу спокойной уверенности в себе, не подчиненной законодательству общепринятых соглашений или велениям моды. Я еще коснусь этого в примечании «Корни и одиночество» (РС IV, $n^\circ$ 171/3, в особенности стр. 1080).

тиями раньше и сам Лебег. *Переступить*, будучи не простым исполнителем воли соглашений, ставших у власти, не добровольным узником тех кругов, что их негласные законы повелительной рукой вокруг нас очертили, но самим собой до конца — вот тот самый, уединенный, акт, в котором (и в нем прежде всего) нам дано *«творчество»*. Все прочее, как правило, прилагается.

Впоследствии мне случалось среди математиков, принявших меня в свой клан, встречать как старших, так и ровесников, заметно более блестящих, более одаренных, чем я. Меня восхищала легкость, с которой они, словно бы играя, овладевали новыми понятиями, жонглируя ими, как будто привычными с колыбели — тогда как я себя чувствовал неповоротливым увальнем, с трудом, как крот, пробивавшим себе дорогу сквозь бесформенную груду вещей, которые (как меня убедили) мне было важно знать, и разобраться в которых от начала до конца я не ощущал в себе сил. Я в самом деле никогда не был блестящим студентом, легко побеждающим на престижных состязаниях, вполщелчка усваивающим неприступные программы.

Большинство моих самых блестящих товарищей стали, впрочем, компетентными и известными математиками. И все же теперь, по прошествии тридцати или тридцати пяти лет, я вижу, что они не оставили в современной математике по-настоящему глубоких следов. Им удавались вещи, иногда красивые, в рамках уже законченного контекста; они и помыслить не смели о том, чтоб затронуть самые границы. Они, не подозревая о том, остались узниками кругов невидимых и властных, установленных, как границы для Вселенной, в данную эпоху и в данной среде. Чтобы переступить их, они должны были бы обрести вновь способность, дарованную каждому из них, точь-в-точь как и мне, при рождении — способность быть одному.

Маленький ребенок без труда может быть один. Он одинок от природы, даже если случайная компания ему не досаждает, и при том, что он знает, как потребовать материнский сосок, когда подходит час кормления. И он знает прекрасно, хотя никто ему этого не говорил, что сосок — для него, и он *умеет* сосать. Но мы зачастую теряем связь с этим ребенком в нас. И постоянно проходим мимо самого лучшего, не удосуживаясь взглянуть...

Если в «РС» я обращаюсь к кому-нибудь, кроме самого себя, то это не «публика». Я обращаюсь к тебе, читающему эти строки, как к *человеку*, как к *одинокому* человеку. С тем в тебе, кто умеет быть один, с ребенком — вот с кем я хочу говорить, и ни с кем иным. Он часто далеко, этот ребенок, уж я его знаю. Ему давно известно, почем фунт лиха. Он прячется Бог знает где, и нелегко подчас до него добраться. Можно подумать, что он мертв с незапамятных времен, что его никогда и не было — и однако я знаю наверное, что где-то он да есть, притом в добром здравии.

И вот каков *знак* тому, что я услышан. Это когда, несмотря на всю разницу — в судьбах ли наших, в культуре — то, что я говорю о своей жизни, отзовется в тебе эхом и найдет резонанс; когда ты снова увидишь перед собой *твою собственную жизнь*, твой собственный опыт размышлений о тебе самом, быть может, в таком свете, какого ты не брал в расчет до сих пор.

Дело не в «отождествлении» с чем-либо или с кем-либо, тебе чуждым. Но может вдруг статься, что ты откроешь вновь твою жизнь, то, что всего прочего тебе *ближе*, следя за тем, как я переоткрываю свою на страницах «РС» вплоть до этих самых строк, сию минуту возникающих на листе.

## 3.

Прежде всего, «РС» — это *раздумья* обо мне самом и о моей жизни. Тем самым, это и *свидетельство*, причем двух сортов. Это свидетельство о моем *прошлом*, на которое опирается основной груз моих раздумий. Но в то же время это и свидетельство о самом что ни на есть *настоящем* — об этих самых мгновеньях, когда я пишу и рождаются страницы «РС» на протяжении часов, дней и ночей. Эти страницы — надежные свидетели моих долгих размышлений о своей жизни, как она протекала в действительности (и как течет по сей день...).

Эти страницы не содержат литературных претензий. Они представляют собой *документ* обо мне самом. Я позволил себе изменить в нем что бы то ни было лишь в самых узких пределах[7] (особенно для некоторых стилистических поправок). Если он на что и претендует, то на одну только достоверность. А это немало.

С другой стороны, в документе этом нет ничего от «автобиографии». Из него ты не узнаешь ни даты моего рождения (которая нужна разве затем, чтобы составлять гороскопы), ни имен моих отца и матери, ни того, чем они занимались в жизни, ни как звали ту, которая стала моей женой, ни имен других женщин, сыгравших важную роль в моей судьбе, или детей, рожденных от этих любовных союзов, ни куда вели выбранные ими пути. Не то чтобы это мало для меня значило когда-то или не сохранило своей значимости по сей день. Но так уж начинались и по такой дороге пошли мои раздумья, что ни одной минуты я не чувствовал стремления хоть бы и слегка погрузиться в описания людей и событий. Еще меньше смысла я видел в том, чтобы добросовестно выписывать в ряд имена и цифры.

Мне ни разу не показалось, что тем самым я мог бы скорее приблизиться к своей цели. (При всем при том на немногих предшествующих страницах мне случилось, словно себе же наперекор, привести больше реальных подробностей из своей жизни,

[7]Так, возможные исправления ошибок (фактических, во взгляде на вещи и пр.) не вводятся ретушевкой первого наброска, а появляются в виде сносок внизу страницы или во время позднейшего возвращения к тому же вопросу.

чем, быть может, на тысяче последующих...)

И если ты спросишь меня, что же это за цель я преследую на протяжении тысячи страниц, я отвечу: рассказать, и тем самым *обнаружить*, кое-что о *путешествиях по внутреннему миру*, а это и есть моя жизнь. Этот рассказ-свидетельство проистекает именно на тех двух уровнях, о которых я только что говорил. Это отчет о приключениях прошлого, до самых его корней с началом в моем младенчестве. Но это и продолжение — и обновление — того же самого путешествия в течение тех мгновений, тех дней, когда я пишу «РС» как самопроизвольный отклик на резкий вызов, брошенный мне внешним миром[8].

От внешних событий раздумья питались лишь постольку, поскольку некоторые из них вызывали неожиданные повороты в моих путешествиях по дорогам внутреннего мира, или помогали кое-что прояснить. Похороны с разграблением моего математического труда, о которых здесь долгий еще пойдет разговор, явились таким событием. Они вызвали во мне бурю в ответ, и чувство оскорбленного «я» мобилизовало полки — но в то же время благодаря им мне открылись неведомые до сей поры, глубокие связи, не прерывавшиеся между мной и результатами моего труда.

Конечно, то, что я числюсь в «китах» математики, само по себе не повод (плохой повод, по меньшей мере), чтобы вызвать у тебя интерес именно к моим «путешествиям» — так же как и то, что у меня случались неприятности с коллегами после смены среды обитания и стиля жизни. У меня, между прочим, хватало коллег и даже друзей, находивших, что публично выставлять напоказ эти «состояния души» (как они говорили) более чем нелепо. Дескать, «результаты» — вот что важно. «Душа», — то есть то, от чьего движения в нас происходят на свет «резуль-

[8] Для уточнений по поводу «резкого вызова» см. «Письмо», особенно разделы 3–8.

таты», — наряду с самыми разнообразными сопутствующими чудесами (в нас — так или иначе живущих произведением результатов) оказывается объектом пренебрежения, если не открытой насмешки. Выдается это за скромность. Мне же видятся здесь приметы бегства, и притом до странности беспорядочного, от самого воздуха, которым мы дышим. Пишу я, и это наверное, не для того, кто поражен этим видом скрытого презрения к самому себе — его болезнь вынудила бы его пренебречь тем лучшим, что я способен предложить. Болезнь презрения к тому, что в действительности составляет *его собственную жизнь* так же, как и мою: к движениям поверхностным и глубоким, утонченным или грубым, оживляющим психику, и именно к *душе* — той, что накапливает опыт и противится ему, той, что вдруг застывает, как лед, не дыша; расцветает и складывает лепестки — той, что, учась, узнает…

Рассказывать о происшествиях во внутреннем мире можно лишь тому, кто пережил нечто сходное, и никому иному. Но даже тогда, когда такой рассказ ведется только для себя самого, редко бывает, чтоб он нет-нет да и не соскользнул бы в привычную колею *мифа*, герой которого и есть сам рассказчик. Не творческим воображением народа, создающего культуру, рождается такой миф, но тщеславием тех, кто не посмел взглянуть в глаза куда как скромной действительности, предпочтя подменить живое творение своего духа мертвой конструкцией. Но рассказ *правдивый* (если он возможен) о приключениях, пережитых на самом деле, представляет собою ценность. Она определяется не престижем (заслуженным или нет) автора, а самим фактом *существования* такого рассказа, с правдивостью, его отличающей. Подобное свидетельство равно драгоценно, исходит ли оно от человека знаменитого, даже прославленного, или от незаметного служащего без перспектив, обремененного семьей — или от преступника, нарушившего закон.

Если для других такой рассказ полезен, то прежде всего тем, что предоставляет случай вновь столкнуться с его сюжетом в самих себе, читая это свидетельство — повествование без прикрас о том, что некто испытал. То есть (иными словами) перечеркнуть, быть может, в себе (хоть бы и только на время прочтения книги) презрение к *своему собственному приключению*, и к той самой «душе», для которой он и пассажир, и капитан…

## 4.

Говоря о своем прошлом как математика и затем раскрывая (вопреки своему желанию) интриги и секреты, связанные с грандиозными Похоронами дела моей жизни, я, не стремясь к тому, написал картину на сюжет, принадлежащий к определенной среде и эпохе, отмеченной смещением неких ценностей — из тех, что придают смысл человеческому труду. Такого рода «картина нравов», набросанная по контурам «хроники происшествий», без сомнения, уникальна в истории «Науки». То, что я успел сказать выше, предупреждает весьма недвусмысленно о том, что в «РС» ты не найдешь «досье» по поводу некоего «дела», едва ли заурядного — рассказа, который наскоро ввел бы тебя в курс событий. Тот же, кто займется все-таки поисками такого досье, пройдет с закрытыми глазами почитай что мимо всего, что составляет суть и плоть «РС».

Как намного подробнее объясняется в моем «Письме», «расследование» (или «картина нравов») — это главным образом части II и IV, «Похороны (I), или Платье голого короля» и «Похороны (III), или Четыре Действия». Страница за страницей я упрямо вытаскиваю на свет множество сочных (чтоб не сказать больше) фактов, и стараюсь кое-как по мере прибывания расставить их по местам. Мало-помалу факты эти складываются в общую картину, постепенно выходящую из тумана, так что краски ее делаются все живей, а контуры — все отчетливей. В этих записках, со дня на день, «голые факты», чуть только будучи выявлены, безнадежно переплетались с личными воспоминаниями, с комментариями и размышлениями психологического, философского и даже (иногда) математического толка. Вот та́к оно, и что я могу!

Когда я уже закончил работу, которая больше года держала меня в напряжении, составление досье в стиле «результаты расследования» должно было бы представлять собой дополнительный труд на несколько часов — может быть, дней — в зависимости от любознательности и взыскательности читателя, в том заинтересованного. Был период, когда я очень старался его составить, это пресловутое досье. Это было, когда я начал писать примечание, которое собирался назвать «Четыре Действия»[9]. Но нет, и ничего нельзя было поделать. У меня не получилось! Решительно, это не мой стиль, и теперь, на старости лет, менее, чем когда-либо. Но думаю, что на сегодняшний день, учитывая «РС», я довольно потрудился на пользу «математического сообщества», чтобы с чистой совестью предоставить другим (если среди моих коллег найдутся те, кто почувствуют к этому интерес) позаботиться о составлении такого «досье», какое потребуется.

## 5.

Пришла пора посвятить несколько слов моему математическому труду, который занимал и продолжает занимать (к моему собственному удивлению) важное место в моей жизни. Я возвращаюсь к нему не раз на страницах «РС» — иногда на языке, понятном всякому, еще кое-где — немного техническом[10]. В

[9]ожидаемое примечание по завершении вылилось в часть IV «РС», состоящую из 70 примечаний, растянувшуюся на добрые четыреста страниц.

[10]В равной мере и здесь, и там в дополнение к математическим обзорам уже завершенного мной труда содержатся новые математические разработки. Из них самая длинная — «Пять фото (кристаллы и $\mathcal{D}$-модули)» в

этих последних случаях большая часть того, что я излагаю, окажется чересчур сложной не только для одних «непосвященных», но даже для коллег-математиков так или иначе «не в струе» той области науки, о которой пойдет речь. Само собой, ты можешь перелистнуть без лишних слов те страницы, которые тебе покажутся чересчур «мудреными». Но ты можешь и просмотреть их, уловив (как знать заранее?) в каком-то отрывке отражение «таинственной красоты» (как написал мне один мой друг, не математик по профессии) мира математических сущностей, возникающих наподобие «странных, недостижимых островов» в широко раскинувшихся зыбких водах раздумья.

Большинство математиков, как я уже говорил недавно, в мире понятий ограничили сами себя жесткими рамками, затворившись во *Вселенной*, обустроенной раз и навсегда — в сущности той самой, которую нашли «совсем готовой», когда принимались за свои ученые изыскания. Они словно бы получили в наследство большой и красивый дом со всеми удобствами, с гостиными, кухнями и мастерскими, наборами кухонной посуды, с общедоступными инструментами — да и со всем, право же, из чего мастерят и готовят. Но каким образом постепенно, из поколения в поколение, строился этот дом, как и почему были задуманы и изготовлены эти инструменты (а не другие...), почему комнаты размещены и устроены здесь так, а там иначе — вот сколькими вопросами наследникам никогда и в голову не приходило задаться. Вот та «Вселенная», «данность», в которой должно жить — точка, и все! Нечто как будто бы великое, огромное (и это ведь, как правило, долгое дело — обойти все комнаты), но *привычное* в то же время, а главное — *неизменное*. Если они о чем и хлопочут, то о том, чтобы содержать в порядке и украшать наследное достояние: починить колченогий стул, оштукатурить фасад, подточить инструмент, иногда

«РС» IV, примечание $n^\circ$ 171 (ix).

даже, в случае чьей-нибудь особенной предприимчивости, изготовить в мастерской полный набор новой мебели. И так выходит, когда они все устроят, что мебель теперь — сама красота, да и весь дом оказывается разукрашенным.

Еще реже один из них задумывает внести изменения в устройство какого-нибудь инструмента из запаса, или даже, под настойчивым давлением необходимости, придумать и изготовить новый. И, взявшись за это, он только что не рассыпается в извинениях за то, что им ощущается как преступление, недостаток благоговения к семейной традиции, в которую его странное новшество привносит как будто бы некоторый беспорядок.

В большинстве комнат этого дома окна и ставни накрепко закрыты — несомненно, из страха, как бы не ворвался ветер со стороны. И когда красивая новая мебель, не говоря уже о потомстве, начинает загромождать дом, всюду, вплоть до самых коридоров, становится не пройти, ни один из этих наследников не пожелает дать себе отчет в том, что его уютная, привычная Вселенная делается тесной и сковывает движения. Скорее, чем стараться разрешить эту незадачу, все они предпочтут, протискиваясь, пробираться как-нибудь, кто между буфетом Людовика XV и плетеным креслом-качалкой, кто между сопливым мальчуганом и египетским саркофагом; и кто-то еще наконец, за неимением лучшего, полезет, карабкаясь изо всех сил, на груду самых разнородных предметов, роняя стулья, круша скамейки…

Небольшая картина, которую я набросал, не содержит ничего, что было бы спецификой лишь математического мира. На ней отражено древнее, с незапамятных времен укоренившееся положение дел, с каким можно столкнуться в любой среде, во всех сферах человеческой деятельности, причем (насколько я знаю) всех обществ и всех эпох. Я уже намекал на это — и сам ни в коей мере не претендую на роль исключения. Как покажет мое свидетельство, справедливо как раз обратное. Случилось всего лишь так, что в сравнительно ограниченной области интеллектуального творчества я оказался не слишком серьезно затронут[11] именно этими старинными уложениями, которые можно было бы назвать «культурной слепотой» — неспособностью видеть (и двигаться) за пределами «Вселенной», установленными культурным окружением.

Что до меня, я ощущаю свою принадлежность к роду математиков, чье наслаждение и чье стихийное призвание — беспрестанно строить новые дома[12]. Вступив на дорогу, они не могут удержаться от того, чтобы походя не изготовить инструментов, орудий, приборов, предметов мебели, необходимых как за тем, чтобы построить дом от основания до крыши, так и для того, чтобы уснастить в изобилии будущие кухни и мастерские и обустроить дом, и жить в нем в радости и довольстве. Однако, когда все до последнего водосточного желоба, до последнего табурета уже установлено, редко бывает, чтобы работник надолго задерживался там, где каждый камень и каждое стропило несут следы руки, трудившейся над ними. Его место — не в тишине готовых, с иголочки, вселенных, как бы ни были те радушны и гармонично устроены, его ли собственными руками или трудом его предшественников. Ведь иные задачи уже зовут его к новым постройкам; напор их нужд, властный и настойчивый, ясно ощутим, быть может, для него одного. Или (еще чаще) ему, и только ему, дано предчувствовать заранее, с какой стороны на сей раз донесется их повелительный зов. Его место — открытый воздух. Он друг ветру, и ему ни капли не страшно

[11]Главная тому причина мне видится в наличии определенного благоприятного климата, окружавшего меня в детстве, начиная с пятилетнего возраста. См. по этому поводу примечание «Невинность» (PC III, $n°$ 107).

[12]Этот образ-архетип строящегося дома в первый раз всплыл на поверхность и нашел словесное выражение в примечании «Инь-слуга и новые хозяева» (PC III, $n°$ 135).

остаться наедине со своим делом хоть на месяцы, хоть на годы, а хоть бы и на всю жизнь, если не придет на выручку желанная смена. У него только две руки, как у всякого, можно не сомневаться, но две руки, каждую минуту ищущие, чем бы заняться, не пренебрегающие ни грубой, ни тонкой работой, не устающие исследовать и обновлять знания о бесчисленном множестве непрестанно манящих неизведанностью тайн вокруг, строить модели и перестраивать. Две руки — пожалуй что немного, ведь мир бесконечен. От века его им не исчерпать! А все же, две руки — это и немало...

Я не силен в истории, но если нужно назвать математиков из этого рода, сами собой на ум приходят имена Галуа, Римана (из предыдущего столетия), Гильберта (начало нашего века). Если искать их среди тех старших математиков, которые приняли меня с моих первых научных шагов в математическое сообщество[13], то прежде всех других передо мной встает имя Жана Лерэ, несмотря на то, что наши встречи с ним были редкими и не более чем эпизодическими[14].

Я набросал здесь в общих чертах два портрета: математика-

---

[13]Я рассказываю об этих шагах в разделе «Долгожданный иностранец» (РС I, §9).

[14]Это не помешало мне (вслед за Картаном и Серром) войти в число тех, кто активнейшим образом применял, пропагандировал и способствовал развитию одного из важнейших новаторских понятий, введеных Лерэ, то есть понятия пучка, занявшего место в ряду главных инструментов для моего труда, посвященного геометрии. Оно же снабдило меня ключом к расширению понятия пространства (топологического) до понятия топоса, о котором пойдет разговор ниже.

Образ Лерэ, впрочем, кажется, расходится с портретом «строителя», мною набросанным — в том месте, где говорится о работе над домом от самого фундамента до крыши. Он, скорее, не мог удержаться и закладывал обширные фундаменты в таких местах, где никому это и в голову не могло прийти, предоставляя другим позаботиться о дальнейшем строительстве и, когда дом уже готов, обживать эти места (не более чем временное пристанище)...

домоседа, который довольствуется тем, чтобы содержать в порядке и украшать наследное имущество, и строителя-первопроходца[15], который не может отказать себе в том, чтобы беспрестанно преодолевать границы «кругов невидимых, но властных» — тех, что ограничивают Вселенную[16]. Их также можно называть «консерваторами» и «новаторами» — немного броско, но наводит на размышления. Существование тех и других по-своему оправдано, каждому предназначена своя роль в том самом общем предприятии, что длится вот уж которое поколение, веками, тысячелетиями. В период расцвета науки или искусства между этими характерами не бывает ни противопоставления, ни антагонизма[17]. Будучи различны между собой, они взаимно дополняют друг друга, как дрожжи и тесто.

Между этими двумя крайними (но отнюдь не противоположными по природе) типами размещен, само собой, весь диапазон характеров промежуточных. «Домосед», который и в мыслях не держит покинуть привычное обиталище, не говоря уже о

[15]Крадучись в обход прямого смысла, тайком, я соединил в этом месте два мужественно звучащих наименования («строитель» и «первопроходец»), которые отражают, однако, весьма различные аспекты импульса к открытию — более тонкие по своей природе, чем эти два слова способны передать. Нам еще предстоит с этим столкнуться во время прогулки-раздумья, на этапе «Открытие Матери, или два склона» (§17).

[16]Тем самым он невольно устанавливает в этой древней (если не для него самого, то, по крайней мере, для менее подвижных его сородичей) Вселенной новые границы, новые круги, конечно, просторнее прежних, но столь же невидимые, столь же властные, как и те, которые он, восстав, смог лишь заменить.

[17]Именно так обстояли дела в математике в период с 1948 по 1969 год, чему я был непосредственным свидетелем, когда сам входил в математическое сообщество. После моего ухода в 1970 году наблюдалось что-то похожее на широкомасштабное сопротивление, вроде «всеобщего презрения», по отношению к «идеям» вообще, и особенно к важнейшим новаторским идеям, мною предложенным.

том, чтобы взвалить на себя труд пойти и построить новое Бог весть где, не замедлит, однако, когда уж и впрямь становится тесно, взять в руку мастерок, чтобы привести в порядок погреб или чердак, надстроить этаж, и даже при необходимости пристроить к стенам какое-нибудь подсобное помещение скромных размеров[18]. Не будучи строителем в душе, он зачастую все же смотрит с сочувствием во взоре, во всяком случае без тайного беспокойства или осуждения, на того, кто, бывало, делил с ним кров, а теперь горбит, собирая балки и камни в какой-то непостижимой глухомани с таким видом, будто узрел там дворец...

## 6.

Вернемся, однако же, к моей персоне и моему труду. Если я отличился в математическом искусстве, то не столько за счет умения и настойчивости в разрешении проблем, завещанных моими предшественниками, сколько благодаря природной склонности, позволявшей мне видеть *вопросы*, заведомо узловые, которых не замечал никто, извлекать на свет *полезные понятия*, в которых была нужда (зачастую никто об этом не задумывался, пока не появлялось новое понятие), а также *удачные формулировки*, никому до тех пор не приходившие в голову. Весьма нередко понятия и формулировки собирались в картину настолько стройную и безукоризненную, что про себя я уже нимало не сомневался в их правильности (разве что с точностью до небольших поправок) — и тогда, если речь не шла о работе над отдель-

[18]Большинство моих старших коллег (о чем говорится, например, в разделе «Желанный долг», Введение, §10) относятся к этому промежуточному типу. В особенности мне приходят на ум Анри Картан, Клод Шевалле, Андре Вейль, Жан-Пьер Серр, Лоран Шварц. Впрочем, они все, кроме, быть может, Вейля, сочувственным взглядом, «не тая ни тревоги, ни укора», провожали меня в мои уединенные походы за приключениями.

ными статьями, предназначенными для публикации, я часто позволял себе остановиться и не тратить время на доказательства: ведь многие из них в ясной уже перспективе утверждения и соответствующего ему контекста, не требуя более «мастерства», становились едва ли не простой рутиной. Объектам, завораживающим взгляд, несть числа; возможно ли ответить до конца на каждый призыв! При всем том предложения и теоремы, доказанные честно, как полагается, исчисляются тысячами в моих работах, написанных и опубликованных — и думаю, можно сказать, что за небольшим исключением все они вошли в общую наследную копилку вещей, обыкновенно принимаемых как «известные», и так или иначе широко используемых повсюду в математике.

Но еще сильнее, чем об обнаружении новых вопросов, открытии понятий и утверждений, — о плодотворных *точках зрения*, неизменно ведущих меня к тому, чтобы представлять и в той или иной мере развивать совершенно новые *темы*, — вот о чем печется мой дух, и вот к чему в особенности устремлены усилия моего таланта. Похоже, что это и есть самая существенная часть моего вклада в современную математику. По правде говоря, бесчисленные вопросы, понятия, утверждения, о которых я толкую, приобретают для меня смысл лишь в свете такой вот «точки зрения» — или, лучше сказать, они *рождаются* вдруг, с силой очевидности; точь-в-точь как в черной ночи возникший свет, пускай рассеянный, словно бы рождает из ничего те самые очертания, расплывчатые или отчетливые, которые посреди темноты неожиданно открываются нам. Без такого света, который соединял бы их в общую картину, десять ли, сто ли, тысяча вопросов, понятий, утверждений нагромождаются бессвязной и бесформенной грудой «умственных приспособлений», отделенных друг от друга — совсем не так, как части единого *Целого*, которые если и прячутся, желая остаться невидимыми, в складках ночной завесы, то ощущаются тем самым не менее ясно, и в предчувствии дают о себе знать.

Когда точка зрения плодотворна? Тогда, когда она раскрывает нам живые, действующие части объединяющего и придающего им смысл Целого. Это, во-первых, жгучие вопросы, никем еще не услышанные, и (как если бы в ответ на эти вопросы) понятия до того уже естественные, которые, однако, никому и в голову не приходило извлечь на свет. В тот же список входят утверждения, на первый взгляд само собой разумеющиеся, которые, однако, до сих пор никто не рискнул сформулировать. Во-вторых, когда она проливает свет на породившие их проблемы, вместе с понятиями, ранее неизвестными, позволившими их выразить математическим языком. В еще большей степени, чем так называемые ключевые теоремы в математике, плодотворные точки зрения в нашем искусстве суть[19] самые мощные инструменты. Или, еще точнее, они — *глаза* искателя, страстно желающего познать природу объектов, составляющих математику.

Итак, плодотворная точка зрения есть не что иное как пресловутый *глаз*, благодаря которому мы одновременно *открываем* и *прозреваем единство* во множественности открывшегося нам. И это единство — воистину сама жизнь, дуновение, которое, складывая бесчисленные осколки в целое, вдыхает в них душу.

Но, как это заложено в самом названии, «точка зрения» сама по себе остается частичной. Она предлагает нам *один из видов* пейзажа или панорамы среди множества других столь же ценных, столь же «настоящих». Именно в той мере, в какой точки зрения, сочетаясь, дополняют друг друга до самой реальности, читай — множится число наших «глаз», наш взгляд проникает

[19]Конечно, это справедливо не для одного только «нашего искусства», но и (как мне кажется) для всякого труда, связанного с открытием, по крайней мере из рода умственного познания.

глубже в суть вещей. Чем сложней и богаче реальность, которую мы стремимся познать, тем важнее иметь в распоряжении несколько «глаз»[20], дабы постичь всю широту ее — и всю изысканность.

И случается иногда, что связка точек зрения, сходящаяся над одним и тем же обширным пейзажем, при посредстве которой нам удается ловить *Единое* во множестве, дает начало вещи совершенно новой, превосходящей каждую из отдельных перспектив, точь-в-точь как живое существо больше любой своей конечности, любого органа. Эту новую вещь можно назвать *ви́дением.* Видение объединяет уже известные точки зрения, которые его воплощают, и открывает нам иные, до сих пор неведомые, совершенно так же, как плодотворная точка зрения позволяет нам обнаружить и воспринять как часть единого Целого множество новых вопросов, понятий и утверждений.

Иначе говоря, по отношению к точкам зрения видение, которое кажется из них вытекающим и которое их объединяет, является тем же, что есть яркий и теплый дневной свет для различных составляющих солнечного спектра. Видение широкое и глубокое — как неисчерпаемый *источник*, созданный, чтобы наделять ясностью и вдохновением труд не только лишь того, в чьей душе от него родился свет, что носят в себе его служители, но и целых поколений, очарованных, быть может (как и он сам когда-то), дальними пределами, смутно различимыми в этом свете...

[20]Всякая точка зрения приводит к развитию *языка*, на котором она может быть выражена, именно ей присущего. Иметь несколько «глаз», или «точек зрения», для изучения ситуации означает также (по крайней мере в математике) располагать *несколькими различными языками*, чтобы подойти к ней со всех сторон.

# 7.

«Продуктивный» период моей математической деятельности, то есть подкрепленный статьями, написанными как полагается — это время с 1950 по 1969 год, всего двадцать лет. И в течение двадцати пяти лет, с 1945 (когда мне стукнуло семнадцать) по 1969 (когда мне перевалило за сорок два), свою энергию я вкладывал практически полностью в математические исследования. Вклад и впрямь чрезмерный. Я за него заплатил долговременным духовным застоем, постепенным «очерствлением», о котором не раз говорится на страницах «РС». И все же, внутри ограниченного поля чисто умственной деятельности, что касается зарождения и возмужания видения, обращенного в один только мир математики, это были годы интенсивного творчества.

В течение этого долгого периода моей жизни как время мое, так и энергия почти целиком были посвящены работе над отдельными статьями: тщательному труду по изготовлению, складыванию вместе и притиранию частей, как того требовала постройка домов, снабженных всем необходимым сверху донизу; меня к ней звал внутренний голос (или демон?) — господин управляющий работ, идеи которых он же мне и подсказывал по мере того, как двигалось дело. Занятый встававшими передо мной одна за другой задачами камнетеса, каменщика, плотника, даже водопроводчика, столяра и краснодеревщика, редко когда я имел досуг изложить черным по белому, хоть бы и в общих чертах, генеральный план, никем, кроме меня, (как это выяснилось позже) не видимый, который на протяжении дней, месяцев и лет водил моей рукою с уверенностью сомнамбулы[21]. Надо сказать, что работа над

[21] Образ сомнамбулы был мне навеян названием замечательной книги Кестлера «Сомнамбулы» (изд. Кальман Леви), представляющей собой «Очерк истории концепций Вселенной» (со времен зарождения научной мысли до

эпохи Ньютона). Одна из особенностей этой истории поразила Кестлера, а именно — до какой степени иногда путь от одной точки на маршруте познания мира до другой, как будто бы (по логике вещей и в перспективе многих лет) к ней совсем близкой, претерпевает немыслимые повороты, словно нарочно бросая вызов здравому смыслу; и как при этом, пройдя тысячу поворотов и, кажется, заблудившись безвозвратно, с «уверенностью сомнамбулы» люди, которые отправлялись на поиски «ключей» к устройству Вселенной, натыкались, как бы вопреки себе и часто не отдавая себе в том отчета, на *другие* «ключи», существования которых они решительно не предвидели, и которые, однако, оказываются «подходящими».

Судя по тому, что я мог наблюдать вокруг себя, в математике эти головокружительные повороты на пути к открытию случались и с искателями большого масштаба, но никак не со всеми. Это могло быть связано с тем, что два или три столетия тому исследования в естественных науках, и особенно в математике, оказались свободными от догм, религиозных или метафизических, присущих данной эпохе, которые всегда служили мощными тормозами развития (будь оно на пользу или во вред) «научного» понимания Вселенной. Верно, впрочем, и то, что для того, чтобы некоторые идеи и понятия в математике, наиболее фундаментальные и очевидные (как, например, понятие перемещения, группы, числа нуль, действия с буквенными выражениями, понятие координат точки в пространстве, множества или топологической «формы», не говоря уже об отрицательных и комплексных числах), появились на свет, потребовались тысячелетия. Это столь же убедительные признаки наличия давнего «блока», глубоко укоренившегося в психике препятствием к восприятию новых идей, даже когда они по-детски просты и просятся в мир настойчиво, с силой очевидности — на протяжении поколений, даже тысячелетий...

Возвращаясь к моему собственному труду, должен сказать, что, как мне кажется, «срывы» (они у меня случались, пожалуй, чаще, чем у большинства моих коллег) в нем ограничивались исключительно отдельными деталями, и обычно я сам же вскорости их исправлял. То были попросту «пустячные происшествия» чисто локальной природы, без серьезных последствий для справедливости основных догадок по поводу исследуемой ситуации. Напротив, на уровне идей и глобальных руководящих предчувствий мой труд, представляется мне, свободен от всяческого рода «промахов», как бы невероятно это ни звучало. Эта уверенность, неизменно и безошибочно открывавшая мне всякий раз если не конечные *результаты* предприятия (они как раз чаще всего оставались скрытыми от взгляда), то по меньшей мере *направления* наиболее плодотворные, а те уже вызывались вести меня статьями, которую я вел с любовным тщанием, сама по себе мне отнюдь не неприятна. К тому же при том способе выражения мыслей в математике, который исповедовался и применялся моими старшими коллегами, предпочтение отдавалось (чтоб не сказать больше) технической стороне работы и нимало не поощрялись «отступления». Последние, как правило, подробно останавливаются на «мотивировках»; но даже те из них, что претендуют на роль проводника в тумане, в действительности просто толкуют о прячущемся там образе не то призраке. Картина, которую они рисуют, может быть, и вдохновляющая, но она далека от воплощения в осязаемую конструкцию из дерева, или камня с цементом, чистую и прочную — так что все это похоже скорее на обрывки мечты, чем на труд мастера, усердный и добросовестный.

На количественном уровне моя работа в эти годы интенсивного творчества имела конкретные результаты прежде всего в виде нескольких десятков тысяч страниц публикаций, в форме статей, монографий и записок семинаров[22], и сотен, если не тысяч, новых понятий, вошедших в общую копилку под теми самыми названиями, которые они получали от меня по выходе в свет[23]. Очень вероятно, что во всей истории математики я — человек, введший в нашу науку самое большое число новых понятий, и тем самым одновременно тот, кто изобрел больше всех новых названий, стараясь, как мог, чтобы они выражали

---

непосредственно к вещам *основным* — эта самая уверенность и пробудила в моей памяти образ Кестлеровской «сомнамбулы».

[22]Начиная с шестидесятых годов, часть из них написана совместно с коллегами (прежде всего Ж. Дьедонне) и учениками.

[23]Важнейшим из этих понятий сделан обзор в «Тематическом очерке» и в сопровождающем его «Историческом комментарии», которые будут включены в четвертый том «Раздумий». Некоторые из названий были мне предложены друзьями и учениками, как, например, термин «гладкий морфизм» (Ж. Дьедонне) или набор понятий «ситус, стэк, джерб, связка», получивших развитие в диссертации Жана Жиро.

суть этих понятий не без тонкости и так, чтобы наводить на размышления.

Эти показатели, целиком «количественные», дают лишь грубое представление о моем труде, проходя мимо того, что действительно составляет душу, жизнь и силу. Как я только что говорил, лучшее из того вклада, что я внес в математику, суть новые *точки зрения*, которые мне удалось сначала угадать в темноте, а затем терпеливо *извлечь* на свет и развить в какой-то мере. Как и те понятия, о которых здесь шла речь, новые точки зрения, представленные в великом множестве весьма разнообразных ситуаций, числом своим приближаются к бесконечности.

Существуют, однако, более широкие точки зрения, которые сами по себе порождают и объединяют множество более частных, в огромном числе ситуаций совершенно различных. Такую точку зрения можно также назвать *концепцией* с полным на то основанием. В силу своей плодовитости она дает жизнь обильному потомству идей, которые наследуют ее плодовитость, но в большинстве своем (если не все до одной) менее обширны по значимости, чем материнская идея.

Что же до того, чтобы *выразить* идею, «высказать» то есть, то это часто почти такая же тонкая штука, как и само ее зачатие и медленное вынашивание в том, кого она осенила. Или, лучше сказать, этот тяжкий труд вынашивания и формирования есть не что иное, как процесс «выражения» идеи: труд, состоящий в том, чтобы терпеливо, день за днем, высвобождать ее из пелены тумана, что окружала ее с самого рождения, добиваясь понемногу придания ей осязаемой формы. Картина становится богаче красками, крепнет, ее рисунок делается резче и тоньше на протяжении недель, месяцев и лет. Просто *назвать* идею какой-нибудь выразительной формулировкой или ключевыми фразами, более или менее техническими, может быть делом нескольких строчек, даже страниц — но из тех, кто не знаком уже с ней достаточно хорошо, немногие смогут, услышав такое «имя», восстановить по нему лицо. И когда идея достигает полной зрелости, сотни страниц может оказаться достаточно, чтобы ее выразить, к полному удовлетворению работника, в чьей душе она зародилась — и точно так же может не хватить десяти тысяч страниц, тщательно взвешенных и обработанных[24].

И в том, и в другом случае среди тех, кто берется ознакомиться с трудом, представляющим идею, которая встала наконец во весь свой рост, как большой строевой лес, вдруг возросший на пустынной земле — многие, можно поручиться, отчетливо увидят все деревья, стройные и могучие, и найдут им применение (кто захочет на них взобраться, кто станет выделывать из них балки и доски, а кто-то еще, нарубив дров, разожжет огонь у себя в камине...). И все же редки те, что сумеют увидеть лес.

[24]К тому моменту, как я покинул математическую сцену в 1970 году, общая масса моих публикаций (многие из которых написаны в соавторстве), имеющих центральной темой *схемы*, должно быть, составляла около десяти тысяч страниц. Это, однако, лишь скромная часть программы широкого размаха, относящейся к схемам, которую я видел перед собой. Эта программа была заброшена на неопределенное время, начиная с моего ухода со сцены, невзирая на тот факт, что, если не считать совсем немногих вещей, *все*, что было мною развито и уже опубликовано для того, чтобы затем поступить во всеобщее распоряжение, вошло в общую копилку понятий и результатов, обычно используемых как «хорошо известные».

Уже та часть моей программы, касающейся теории схем, ее дальнейшего развития и ее ответвлений, которую я завершил на момент ухода, представляет собой наиболее объемный труд над основами, когда-либо осуществленный в истории математики, и заведомо один из самых обширных в истории Наук.

## 8.

Пожалуй, можно сказать, что «концепция» есть не просто новая точка зрения, показавшая себя плодотворной, но еще и такая, за которой, ее воплощением, входит в науку новая и широкая тема. И всякая наука, если понимать ее не как инструмент власти и могущества, но как путешествие-приключение человеческого сознания, предпринятое века тому назад — есть не что иное, как гармония (бедней она или богаче — уж какая эпоха), которая разворачивается перед нами, пока мы размениваем столетья и поколения, изысканным контрапунктом всех этих тем, вступающих поочередно — словно бы призванных из небытия, чтобы, переплетясь друг с другом, слиться в ней.

Среди многочисленных новых точек зрения, введенных мной в математику, есть, как видно в перспективе лет, *двенадцать* таких, которые я бы назвал концепциями[25]. Представить себе

[25]Вот, для заинтересованного читателя-математика, список этих двенадцати главных идей, или «ключевых тем» моего труда (в хронологическом порядке их появления):

1. Топологические тензорные произведения и ядерные пространства.
2. «Непрерывная» и «дискретная» двойственность (производные категории, «шесть операций»).
3. «Йога» Римана-Роха-Гротендика ($K$-теория, связь с теорией пересечений).
4. Схемы.
5. Топосы.
6. Этальные и $l$-адические когомологии.
7. Мотивы и мотивная группа Галуа ($\otimes$-категории Гротендика).
8. Кристаллы и кристальные когомологии, йога «коэффициентов де Рама», «коэффициентов Ходжа».
9. «Топологическая алгебра»: $\infty$-стэки, derivateurs; когомологический формализм топосов как основа для новой гомотопической алгебры.
10. Ручная топология.
11. Йога анабелевой алгебраической геометрии, теория Галуа-Тейхмюллера.
12. «Теоретико-схемная», или «арифметическая» точка зрения на пра-

мой математический труд, его «почувствовать», значит увидеть и почувствовать мало-мальски хотя бы некоторые из идей и соответствующих им главных тем, составивших основу его и душу.

Силою обстоятельств некоторые из этих идей «главнее», чем другие (которые, в свою очередь, тем самым менее значительны). Иными словами, среди новых тем, о которых шла речь, попадаются те, что шире остальных, и те, что глубже проникают в сердце математических тайн[26]. Есть

---

вильные многогранники и правильные конфигурации произвольного рода.

Если не считать первой из этих тем, важная часть которой вошла в мою дисертацию (1953), и которая получила развитие в период, когда я занимался функциональным анализом (с 1950 по 1955 г.), все одиннадцать остальных явились на свет в период моих занятий геометрией, начиная с 1955 года.

[26]Из этих тем наиболее *обширной* по своей *значимости* мне представляется тема *топосов*, которая осуществляет идею синтеза алгебраической геометрии, топологии и арифметики. Самой объемной по числу приложений, получивших развитие уже на настоящий момент, оказалась теория схем. (См. по этому поводу сноску на предыдущей странице.) Именно она в полном смысле слова составила среду обитания еще восьми из рассматриваемых тем (то есть всех остальных, кроме первой, пятой и десятой) и в то же время обеспечила центральное понятие для полнейшего обновления алгебраической геометрии и ее языка.

Напротив, первая и последняя из двенадцати тем кажутся мне по своему масштабу скромнее прочих. И все же, если говорить о последней, представившей новый взгляд на весьма древнюю проблему правильных многогранников и конфигураций — сомневаюсь, что математику, который ей одной посвятил бы себя душой и телом, хватило бы жизни на то, чтобы ее исчерпать. Что касается первой из всех этих тем, топологических тензорных произведений и ядерных пространств, то она скорее играет роль нового инструмента, готового к использованию, чем основы для последующей разработки. При всем том, однако, до меня еще долетают — вплоть до этих последних лет — самопроизвольные отклики более или менее недавних работ, отвечающих (двадцать или тридцать лет спустя) на некоторые из вопросов, которые я тогда оставил неразрешенными.

Наиболее глубокая (на мой взгляд) среди этих двенадцати — тема *моти-*

три (и не последние по масштабу, на мой взгляд), которые, появившись только после моего ухода с математической сцены, находятся пока в зачаточном состоянии. «Официально» их даже не существует: ведь до сих пор не было не было ни одной выполненной по всем правилам публикации, которая стала бы для них свидетельством о рождении[27]. Среди девяти тем, возникших до моего ухода, три последние, покинутые мною в разгаре роста, остаются еще и по сей день на младенческой стадии — за недостатком любящих рук, какие обеспечили бы всем необходимым этих «сироток», брошенных сводить счеты с враждебным миром[29]. Что же касается других шести, достигших полной зрелости за два десятилетия, предшествовавшие моему уходу — можно сказать, что (с точностью

---

*вов*, то есть та, что теснейшим образом связала *анабелеву алгебраическую геометрию* с *йогой Галуа-Тейхмюллера.*

С точки зрения *технических возможностей инструментов*, совершенно готовых и отшлифованных моими стараниями, и повседневного применения на различных «передовых участках» исследования в течение двух последних десятилетий, *схемы* и *этальные и $l$-адические когомологии* представляются мне среди прочих наиболее значительными. Я думаю, что уже сейчас у достаточно осведомленного математика не может быть никаких сомнений в том, что инструмент теоретико-схемный, как и вышедший из него $l$-адический, оказались в числе серьезных достижений века, исполнивших свежими силами и обновивших нашу науку в ходе последних поколений.

[27]Единственный «полуофициальный» текст, в котором эти три темы мало-мальски обрисованы — «Набросок программы», составленный в январе 1984 года по случаю запроса из CNRS[28]. Этот текст (о нем говорится также в третьем параграфе «Введения», «Компас и багаж») будет в основе своей включен в четвертый том «Раздумий».

[28]Centre national de la recherche scientifique = Национальный центр научных исследований — *прим. перев.*

[29]Схоронив втихомолку, чуть не на другой день после моего ухода, этих трех сирот, двух из них потом вырыли с оркестром, позабыв упомянуть труженика-родителя: одну в 1981 году, и другую (ввиду безусловного успеха предыдущей операции) на год позже.

до одной-двух оговорок[30]) они уже сейчас вошли в общую копилку, в чашу, полную опытом привычных знаний. Особенно в среде геометров «все-все-все» пьют из нее в наши дни, не замечая глотков (как это выходило у господина Журдена с прозой), ежедневно и ежечасно. Они стали как воздух, для тех, кто занимается геометрией — или арифметикой, алгеброй и анализом, хоть немного «геометрическими».

Эти двенадцать главных тем моего труда совсем не отделены друг от друга. Для меня они составляют вместе *единство* духа и цели, проходящее всегдашним настойчивым лейтмотивом музыкального фона через весь мой труд, как «записанный» черным по белому, так и не переложенный на слова. Сейчас, когда я пишу эти строки, мне словно бы слышится вновь — как призыв — нота, ведшая тему сквозь те три года бескорыстного («низачем»), страстного, уединенного труда, пора, когда меня еще не тревожил вопрос, есть ли где в мире математики, кроме меня: так сильны были чары, меня захватившие...

Это единство — не просто знак самого работника, отметивший все труды, что вышли из-под его руки. Темы связаны между собой бессчетным множеством нитей, тончайших и вместе с тем легко заметных. Они соединены и тесно перевиты друг с другом, но каждая из них распознается без труда, раскрываясь вдруг составной частью сложного контрапункта — в гармонии, которая собирает их всех в одно и придает любой из них смысл, живость движения и полноту, увлекая ее вперед в общем потоке. Каждая отдельная тема словно бы вышла из этой гармонии, и в ней же — ежесекундно — рождается вновь. Но ведь гармония сама, кажется, не более чем «сумма», «итог» составивших ее тем: в самом деле, они появились раньше. А

[30]Оговорки эти относятся прежде всего к йоге дуальности Гротендика (производные категории и шесть операций) и топосов. О них (и еще о многом другом) речь пойдет более подробно в частях II и IV «РС» («Похороны» (1) и (3)).

я, сказать по правде, не могу побороть в себе чувства (без сомнения, нелепого), что каким-то образом именно эта гармония, еще не возникнув во плоти, но уже наверное ожидая своего часа внутри неведомого нам лона, среди других идей, готовых родиться — что она-то и побуждала выйти на свет одну за другой все эти темы, предназначенные обрести свой настоящий смысл лишь с ее появлением. И еще чудится мне, что именно ее голос, властный и настойчивый, взывал ко мне уже в те годы пылкого, зачарованного одиночества — на самом пороге моей юности...

Как бы то ни было, двенадцать ключевых тем моего труда все вместе, словно повинуясь тайному велению рока, сложились в одну симфонию — или, если взять другой образ, каждая из них оказалась воплощением одной из точек зрения, в совокупности составивших единое широкое *видение*.

Видение это начало выступать из тумана, а очертания его — становиться узнаваемыми, не раньше, чем к 1957–58 гг., годам напряженного вынашивания идей[31]. Кажется странным, но это

---

[31]1957 год — тот самый, когда мне удалось настичь по горячему следу тему «Римана-Роха» (версия Гротендика), которая сразу же принесла мне «всеобщую известность». Это также год смерти моей матери, то есть резко выделенный в моей жизни — и один из наиболее интенсивно творческих, причем не на одной только математической ниве. Двенадцать лет уже шло тому, как все мои силы были вложены в математику. И я вдруг ясно почувствовал, что мои занятия сделали почти «полный оборот» по кругу, так что на часах, пожалуй, время их оставить и взяться за что-то другое. Очевидно, то была потребность духовного обновления, впервые тогда ко мне подступившая. Я собрался было стать писателем, и на многие месяцы прекратил всякую деятельность, связанную с математикой. Под конец я решил, что запишу черным по белому хотя бы те математические работы, какие у меня уже были начаты; без сомнения, дело нескольких месяцев, года самое большее...

Бесспорно, однако, что к безвозвратному скачку на иные круги я тогда еще готов не был. Всякий раз, как я ни пытался взяться снова за математический труд, выходило так, что это он меня захватывал, да накрепко. Еще на двенадцать лет, не выпуская!

видение было настолько мне близко, до того ясно и несомненно, что раньше, чем год назад[32], я и не задумывался о том, чтобы дать ему имя. (А ведь как раз одно из моих пристрастий — *называть* вещи, мной обнаруженные: это первейший способ в них разобраться...) Правда, что я не смог бы конкретно указать момент, пережитый мною как внезапное рождение видения, или, оглянувшись назад, в теперешней перспективе узнать и выбрать такую минуту. Новое видение — нечто заведомо слишком обширное, чтобы появиться сразу, в один миг. Ему нужны долгие годы, если не целые поколения, чтобы, проникнув в душу, постепенно завладеть тем или теми, кто неотрывно, внимательно созерцает — как если бы два новых глаза в муках рождались позади прежних, привычных, призванные понемногу их заменить. И, опять-таки, видение слишком объемно, чтобы говорить о возможности уловить его, «схватить», как хватаешь первое же понятие, возникшее из-за поворота на твоей дороге. А значит, в итоге нет ничего удивительного в том, что мысль как-нибудь назвать вещь настолько широкую, близкую и оттого расплывчатую не могла появиться раньше, чем при взгляде уже

Год, последовавший за этой паузой (1958), был, наверное, самым плодотворным для меня как математика. Это год появления двух центральных тем новой геометрии: бурного старта *теории схем* (предмет моего доклада на международном математическом конгрессе в Эдинбурге летом того же года) и возникновения понятия *ситуса*, то есть предварительной, технической версии важнейшего понятия *топоса*. Сейчас, в перспективе почти что тридцати лет, я могу утверждать, что то был воистину год рождения нового геометрического видения, последовавшего за вступлением в силу двух главных инструментов этой геометрии: схем (которые являют собой метаморфозу старого понятия «алгебраического многообразия») и топоса (представляющего результат преображения — еще более глубокого, чем в случае схем — понятия пространства).

[32] Мне в первый раз пришло в голову этому видению дать название в «Раздумьи» от 4 декабря 1984 г. (сноска $n^\circ$ 136/1 к примечанию «Инь-слуга (2), или великодушие» — РС III, стр. 637).

с некоторого растояния — по истечении промежутка, нужного ей, чтобы достичь настоящей зрелости.

По правде сказать, раньше, чем два года назад, мои отношения с математикой (если не считать преподавательской работы) ограничивались тем, чтобы ее *делать* — повинуясь импульсу, неизменно гнавшему меня *вперед*, в «неизвестность», чей зов был неумолкающим. Не могло быть и речи о том, чтобы остановить этот разбег; задержавшись хотя бы на миг, оглянуться на очертания пройденного пути — даже просто понять, что, собственно, мой труд собой представляет. (То есть определить его место *в моей жизни*, как некоей вещи, все еще связанной со мной глубокими связями, о существовании которых я долгое время не подозревал. И еще — понять его роль в том общем, совместно предпринятом путешествии-приключении, каковым является *математика.*)

И другая странность: чтобы мне наконец «остановиться» и возобновить полузабытое знакомство с этим трудом, или хотя бы только задуматься об том, как *назвать* видение, заключившее в себе его душу, должно было случиться так, чтобы я вдруг столкнулся с реальностью Похорон гигантских масштабов (за могильщиков работали молчание и насмешки) как собственно видения, так и работника, в котором оно зародилось…

## 9.

Непредвиденным образом, данное «предисловие» слово за слово превратилось в эдакое представление, по всем правилам, моего труда, предназначенное главным образом для читателя — не математика по профессии. Это обязывает, и потом, я уже слишком вовлечен в игру, чтобы можно было пойти на попятный; что же мне еще остается, как не покончить с «церемониями»! Я хотел бы сказать худо-бедно хотя бы несколько слов о *сущности* этих волшебных «концепций» (или «ключевых тем»), которым я дал блеснуть на предыдущих страницах, и о природе этого славного «видения», в котором всем основным идеям предписано слиться. Ввиду невозможности прибегнуть здесь к языку сколько-нибудь техническому, образ, который мне удалось бы сейчас вызвать на бумагу, выйдет, без сомнения, чрезвычайно расплывчатым (если только под его личиной не прокрадется в текст что-нибудь старое, привычное...)[33].

Традиционно различают три рода «свойств», или «аспектов» тех или иных явлений во Вселенной, составляющих предмет математических рассуждений. Это суть *число*[34], *размер* и *форма*. О них можно также говорить как об «арифметическом», «метрическом» (или «аналитическом») и «геометрическом» аспектах. В большинстве ситуаций, исследуемых в математике, эти три аспекта присутствуют одновременно, находясь в тесном взаимодействии. При этом, однако, чаще всего имеет место заметное преобладание одного из них над двумя другими. Мне кажется, что для большинства математиков достаточно ясно (тому, кто знаком с ними или просто в курсе их работ), кто они по натуре:

[33]То, что этот образ должен оставаться расплывчатым, нисколько не мешает ему быть верным истинной сути объекта, о котором идет речь (в данном случае моего труда). Наоборот, образ ясный и отчетливый может оказаться сильно искаженным, и к тому же содержать в себе лишь побочные, второстепенные черты объекта, совершенно опуская главные. И потом, если в тебе «найдет зацепку» то, что я скажу о своем труде (а тем самым, разумеется, и кое-что от того образа, который действительно «проносится» предо мной), ты сможешь похвастаться куда лучшим пониманием его сути, чем, пожалуй, любой из моих ученых коллег.

[34]Здесь имеются в виду «натуральные числа» 0, 1, 2, 3 и т.д., или (в крайнем случае) числа (дробные), которые нужны как подручные для выполнения элементарных действий. Они не претендуют на то, чтобы, подобно «вещественным числам», измерять величины, способные к непрерывному изменению — такие, как расстояние между двумя точками, движущимися вдоль прямой, на плоскости или в пространстве.

«арифметики», «аналитики» или «геометры» — даже в том случае, если на скрипке у кого-то из них много струн, и ему доступны всевозможные регистры и диапазоны.

Мои первые, уединенные, размышления над теорией меры и интегрирования совершенно недвусмысленно относятся к разделу «размер», или «анализ». Так же обстоят дела с первой из новых тем, введенных мной в математику (которая представляется мне менее обширной по масштабу, чем остальные одиннадцать). То, что я вступил в математику с «бокового подъезда» анализа, представляется мне обусловленным не столько склонностью моей натуры, сколько «случайным стечением обстоятельств». Именно, пробел в образовании, предложенном мне как в лицее, так и в университете (чересчур огромный для моего духа, одержимого страстью к обобщенности и строгости рассуждений) оказался связанным с «метрическим», или «аналитическим» аспектом сути вещей.

1955 г. отмечает решающий поворот в моих математических занятиях: переход от «анализа» к «геометрии». Мне вспоминается еще захватывающее ощущение (конечно, целиком субъективное), как будто я покинул угрюмые, засушливые степи, чтобы вдруг обрести вновь «землю обетованную» с ее сказочными богатствами, готовыми преумножиться беспредельно, повсюду, где захочешь приложить руку — срывай вволю цветы и фрукты, копай руды... И вот это ощущение захлестывающего, сверх всякой меры[35] изобилия с годами лишь подтвердилось, еще

[35] Я использую сочетание слов «захлестывающий, сверх всякой меры», чтобы кое-как передать выражение «uberwaltigend» из немецкого и его английский эквивалент «overwhelming». В предыдущем предложении выражение (неадекватное) «захватывающее ощущение» следует воспринимать со следующей окраской: то, что бывает, когда мы сталкиваемся с невероятным великолепием, величием и красотой вне рамок обыденного, так, что чувства лавиной обрушиваются на нас — и тогда любая робкая попытка описать, что творится с нашими душами, заранее обречена на неудачу.

углубившись; да оно и сейчас со мной.

Выходит, если есть в математике что-то одно, что (во все времена, без сомнения) увлекало бы меня сильней, чем все остальное, то это не «число» и не «размер», но неизменно *форма*. И среди тысячи и одного призрака, ищущих формы, чтобы нам открыться, тот, кто околдовал меня пуще всех прочих (не ослабляя и теперь своих чар) — *структура*, таящаяся внутри математических объектов.

Структура вещи — совсем не что-то такое, что мы могли бы «изобрести». Мы можем лишь выводить ее на свет терпеливо, смиренно; знакомясь с ней, ее *раскрывать*. Если есть в этой работе изобретательность, и если когда приходится нам браться за труд кузнеца или неутомимого строителя, то отнюдь не затем, чтобы «выковывать» или «строить» *структуры*. Они-то не нуждаются в нас, чтобы существовать — и быть в точности такими, как они есть! Но *выразить*, оставаясь как можно более верными духу, то, над раскрытием и изучением чего мы усердно бьемся, ту структуру, что дается нам неохотно — вот за чем мы бредем, пробираясь наощупь, пробуя языки (а слышен, быть может, лишь лепет), чтобы подступиться к ней. Так и приходится нам постоянно *изобретать язык*, способный все тоньше и искусней передать словами структуру, присущую математическому объекту, и «строить» с помощью этого языка, постепенно и целиком, «теории», которые должны дать отчет о том, что мы поняли и увидели. Маятник движется без остановки между *пониманием* вещей и *выражением* понятого на языке, который отшлифовывает и пересоздает сам себя в процессе работы, под постоянным давлением насущной необходимости.

Как читатель уже, без сомнения, угадал, «теории», отстроенные целиком, суть не что иное, как «красивые дома», о которых речь шла выше (те, что мы получаем в наследство от своих предшественников, и те, что, внимая зову неизвестного, в ответ на него строим своими руками). И если я говорил давеча об «изобретательности» (или фантазии) кузнеца ли, строителя, то должен прибавить: душа, тайный нерв работы — совсем не спесь того, кто скажет: «Я хочу вот так, и никак иначе!» — находя главное удовольствие в том, чтобы решать по-своему. Тот дрянной архитектор, у кого в голове сложены готовыми все планы раньше, чем он удосужится исследовать свой участок земли, его нужды и возможности. Годны ли в дело изобретательность и фантазия искателя, определяется степенью напряженности его *внимания*, с каким он прислушивается к голосам вещей. Ибо вещи во Вселенной неустанно толкуют о себе, открываясь тому, кто озаботится выслушать. И дом тем краше, чем ясней в нем любовь его создателя; дело не в том, насколько он высок и широк. Красивый дом — вернейшее отражение структуры и красоты, скрытых в сердце вещей.

## 10.

Но вот я опять сбился: я ведь предполагал рассказать о главных темах, собравшихся в одно материнское видение — как реки, дочери моря, возвращаясь, все текут к нему…

Это широкое объединяющее видение может быть описано как *новая геометрия.* Именно о ней, думается, грезил еще Кронекер в прошлом столетии[36]. Но действительность (дерз-

[36]Я знал об этой «мечте Кронекера» лишь понаслышке до тех пор, пока кто-то (вполне возможно, что это был Джон Тэйт) не сказал мне, что я нахожусь в процессе ее осуществления. Образование, которое я получал от старших коллег, ссылки на историю включало редко. Восполнялось это не чтением современных или сколько-нибудь древних авторов, но в первую очередь общением с другими математиками, непосредственным или по переписке, начатой старшими. Основным, даже может быть, единственным, внешним источником вдохновения для внезапного и бурного старта теории схем в 1958 году была статья Серра, хорошо известная под сокращением АКП («Алгебраические когерентные пучки»), которая вышла в свет на несколько лет раньше. В остальном же все дальнейшее развитие теории

кая мечта может иногда предчувствовать ее или предвидеть, побуждая нас к открытию) неизменно превосходит, богатством красок, густотой и силой звучания, мечту самую смелую и самую глубокую. Заведомо в этой новой геометрии есть не один такой раздел (если не все сразу), о каком накануне его создания никто не мог и помыслить, менее всего сам работник.

Можно сказать, что «число» способно уловить структуру «разрывных», или «дискретных» систем — часто конечных, состоящих из «элементов», или «объектов», «изолированных» друг от друга, без какого бы то ни было правила «непрерывного перехода» от одного к другому. «Размер», напротив, есть свойство, поддающееся в полном смысле этого слова «непрерывному изменению». Он тем самым способен уловить структуру непрерывных явлений: перемещений, пространств, «многообразий» всех родов, силовых полей и т.п. Итак, арифметика выступает (грубо говоря) как *наука о дискретных структурах*, а анализ — как *наука о непрерывных структурах*.

Что касается геометрии, можно утверждать, что в течение более чем двух тысяч лет ее существования как науки (в современном понимании этого слова) она охватывает оба вида структур: как «дискретные», так и «непрерывные»[37]. Долгое время,

---

питалось энергией, истекавшей по сути от нее самой. Поток этот возобновлялся с годами, хотя бы только в соответствии с требованиями простоты и внутренней согласованности, в попытке рассмотреть в новом контексте все «хорошо известное» в алгебраической геометрии (и усвоенное мной по мере того, как преобразовывалось, проходя через мои руки) — и то еще, что это «известное» дало мне возможность предугадать.

[37]По правде говоря, традиционно именно «непрерывный» аспект находился в центре внимания геометрии, в то время как свойства «дискретной природы», в частности численные и комбинаторные, было принято обходить молчанием, или кой-как, мельком учитывать. И воистину с восхищением десять лет назад я обнаружил богатства комбинаторики икосаэдра, а ведь эта тема совсем не затронута (может быть, даже не замечена) Клейном в его классической книге об икосаэдре. Другой поразительный при-

впрочем, не было настоящего «разлада» между *двумя* геометриями разной природы: одной дискретной, другой непрерывной. Скорее, сосуществовали две различные точки зрения на исследование *самих* геометрических фигур: одна делала упор на «дискретных» (в частности, численных и комбинаторных) свойствах, другая — на «непрерывных» (таких, как положение в окружающем пространстве, или «размер», измеренный в терминах расстояний между точками фигуры, и т.п.).

Разлад возник в конце прошлого столетия, с появлением и развитием того, что иногда называют «абстрактной (алгебраической) геометрией». В общих чертах она состояла в введении для каждого простого числа $p$ геометрии (алгебраической) «в характеристике $p$», скопированной с непрерывной модели геометрии (алгебраической), унаследованной от предыдущих столетий, но все же в контексте, который выступал непримиримо «разрывным», «дискретным». Эти новые геометрические объекты приобрели все возрастающее значение в начале века, и особенно ввиду тесной их связи с арифметикой, наукой в полном смысле этого слова дискретной структуры. Похоже, одна из ведущих идей труда *Андрэ Вейля*[38], даже может быть, главная движущая сила (которая, как водится, осталась более или менее невысказанной в его записанных работах), со-

---

знак той же (двухтысячелетней) небрежности геометров, которые стояли лицом к лицу с дискретными структурами, самопроизвольно проникшими в геометрию, мне видится в том, что понятие группы (симметрий, в частности) не появлялось вплоть до конца прошлого века — и поначалу оно было введено (Эваристом Галуа) в контексте, который тогда не почитался частью геометрических владений. Правда, что и в наши дни есть немало алгебраистов, все еще не разобравших, что теория Галуа — *видение* по сути своей *геометрическое*, которому удалось обновить наше понимание явлений, именуемых «арифметическими»...

[38]Андрэ Вейль, французский математик, эмигрировавший в Соединенные Штаты, один из «членов-основателей» группы Бурбаки, о которой немало будет сказано в первой части «РС» (как, впрочем, и о самом Вейле).

стоит в том, что «собственно» геометрия (алгебраическая), и в особенности «дискретные» геометрии, соответствующие различным простым числам, предоставляют ключ к широчайшему обновлению арифметики. Именно этим духом пронизаны прогремевшие в 1949 году знаменитые *гипотезы Вейля*. Гипотезы совершенно потрясающие, по правде сказать, позволившие предвидеть для этих новых «многообразий» (или «пространств») дискретной природы возможность определенных типов конструкций и рассуждений[39], казавшихся до тех пор немыслимыми вне рамок тех «пространств», которые одни только почитались аналитиками достойными этого имени — именно, пространства, называемые «топологическими» (для которых применимо понятие непрерывного изменения).

Можно считать, что новая геометрия — это прежде всего прочего *синтез* двух миров, до ее появления смежных и тесно связанных друг с другом, но все же отдельных, различных: *мира «арифметического»*, в котором живут (самозванные) «пространства» без принципа непрерывности, и *мира непрерывных величин*, где обитают «пространства» в собственном смысле этого слова, достижимые средствами аналитика и (по этой самой причине) им же признанные достойными пристанища в городе математических объектов. *В новом видении эти два мира, некогда разделенные стеной, стали как один, сметя границы.*

Впервые это видение *арифметической геометрии* (как я предлагаю назвать новую геометрию) зародилось в форме гипотез Вейля. В процессе развития некоторых моих главных тем[40] гипотезы эти оставались основным источником

[39](Предназначается для читателя-математика.) Речь идет о «конструкциях и рассуждениях», связанных с когомологической теорией комплексных или гладких многообразий, в частности, включающих формулу неподвижных точек Лефшеца и теорию Ходжа.

[40]Речь идет о четырех «средних» темах (5–8), то есть темах *топоса*,

вдохновения все время от 1958 до 1966 года. Еще до меня, впрочем, *Оскар Зарисский* с одной стороны, затем *Жан-Пьер Серр* с другой, для пространств-без-стыда-и-совести в «абстрактной» алгебраической геометрии развили определенные «топологические» методы, основанные на тех, что прежде были в ходу среди пространств-с-прочными-устоями во всем мире[41]. Их идеи, несомненно, сыграли важную роль в построении новой геометрии, начиная с первых моих шагов; правда, скорее в качестве отправных точек и *инструментов* (которые мне пришлось в той или иной степени переделать для нужд куда более широкого контекста), чем источника вдохновения, который продолжал бы питать мои мечты и проекты в течение месяцев и лет. Во всяком случае, было вполне ясно сразу, что, даже преобразованные, инструменты эти были весьма далеки от того, что требовалось уже для первых шагов в направлении

---

*мотивов*, *этальных и $l$-адических когомологий* и (в меньшей степени) *кристаллов*. Я их извлек на свет одну за другой между 1958 и 1966 годами.

[41](Предназначается для читателя-математика.) Основным вкладом Зарисского в этом направлении мне представляется введение «топологии Зарисского» (ставшей позднее важным инструментом для Серра в АКП), его «принцип связности» и то, что он назвал «теорией голоморфных функций» — сделавшейся в его руках теорией формальных схем; также «теоремы сравнения» между формальным и алгебраическим (наряду с основополагающей статьей ГАГА Серра, вторым источником вдохновения). Что же до вклада Серра, о котором я упомянул в тексте, он, безусловно, заключается прежде всего во введении в абстрактную алгебраическую геометрию точки зрения *пучков* (предложенной *Жаном Лерэ* десятью годами раньше в совершенно ином контексте), в другой его важнейшей работе АКП («Алгебраические когерентные пучки»), о которой здесь уже говорилось.

В свете этой «поименной переклички»: если бы мне предложили назвать ближайших «прародителей» нового геометрического видения, то имена *Оскара Зарисского*, *Андрэ Вейля*, *Жана Лерэ* и *Жан-Пьера Серра* я бы произнес, не задумываясь. Среди них Серру принадлежит особая роль, так как главным образом через его посредство я ознакомился не только с его собственными идеями, но также с идеями Зарисского, Вейля и Лерэ, немало значившими для зарождения и развития новой геометрии.

фантастических гипотез Вейля.

## 11.

Две идеи, *схемы* и *топоса*, оказались решающими для зарождения и развития новой геометрии. Возникнув почти одновременно и в тесном симбиозе друг с другом[42], они вместе стали, как *двигательный нерв* для небывалого роста новой геометрии, считая с самого года своего появления. Чтобы закончить обзор моего труда, нужно, по крайней мере, сказать несколько слов об этих двух идеях.

Понятие схемы приходит на ум как самое естественное, самое «очевидное», когда речь идет о том, чтобы собрать в одно бесконечный ряд понятий «многообразия» (алгебраического), с каким приходилось иметь дело раньше (*отдельное* такое понятие для каждого простого числа[43]...). И потом, та же самая схема (или «многообразие» нового вида) одна порождает, для *каждого* простого числа $p$, однозначно определенное «многообразие (алгебраическое) в характеристике $p$». Набор этих различных многообразий в различной характеристике можно тогда себе представить чем-то вроде «(бесконечного) веера многообразий» (свое для каждой характеристики).

[42] О бурном зарождении новой геометрии (1958 год) идет речь в сноске $n^\circ$ 31. Понятие ситуса, или «топологии Гротендика» (предварительная версия понятия топоса), появляется по горячим следам понятия схемы. Оно, в свою очередь, предоставляет в распоряжение математиков новый язык «локализации» или «спуска», который применяется на каждом шагу при развитии темы и инструмента теоретико-схемных. Понятие топоса, более глубокое и геометрическое, остается невыраженным в явном виде в течение нескольких последующих лет; оно выбирается на свет главным образом начиная с 1963 года с развитием этальных когомологий и понемногу заставляет признать себя первым из основополагающих.

[43] Удобно также включить в этот ряд и случай $p = \infty$, соответствующий алгебраическим многообразиям «в характеристике нуль».

«Схема» *и есть* этот магический веер, соединяющий между собой, как различные «ветви», эти «аватары», или «воплощения», всевозможных характеристик. Она же тем самым обеспечивает эффективный «принцип перехода», чтобы устанавливать связь между «многообразиями»-выходцами из геометрий, ранее представлявшихся в той или иной мере изолированными, отрезанными друг от друга. Теперь они оказались объединенными в одну общую «геометрию» и внутри ее между собой связанными. Ее можно было бы назвать *теоретико-схемной геометрией*, предварительным наброском «арифметической геометрии», ее бутоном, расцветшим в ходе последующих лет.

Идея схемы сама по себе — простоты младенческой; такая простенькая, такая скромная, что никому до меня и в голову не пришло за ней так низко нагнуться. И до того даже «дурашливая», признаться, что потом еще несколько лет, очевидности наперекор, для многих моих ученых коллег все это выглядело воистину «несерьезно»! У меня, впрочем, месяцы ожесточенного и уединенного труда ушли на то, чтобы убедиться в своем углу, что это действительно «работает» — что новый язык, этакий глуповатый, который я в своей неисправимой наивности упорно стремился испробовать, оказался и впрямь подходящим для того, чтобы уловить, в новом свете и с новой точностью, и в общих отныне рамках, некоторые из самых первородных геометрических предчувствий, связанных с уже существующими «геометриями в характеристике $p$». Это было своего рода упражнение, сочтенное поначалу дурацким и безнадежным всеми «достаточно компетентными» особами. Один я, без сомнения, мог когда-либо вбить себе в голову взяться работать над подобной нелепостью — и даже (тайным бесом ведомый) успешно завершить, всем чертям назло!

Вместо того чтобы дать сбить себя с толку окружавшим меня законодательным соглашениям о том, что серьезно и что нет, я просто *доверился*, как раньше, тихому голосу вещей, уже звучавшему во мне: ведь я умел прислушаться. Награда не заставила себя ждать, превзойдя всяческие ожидания. В течении этих нескольких месяцев, совсем даже не «нарочно», я нашел инструменты мощные и несомненные в своей эффективности. Они дали мне возможность не только вновь получить (играючи) старые результаты, знаменитые своей сложностью, в более резком свете и их превзойти, но также, приблизившись наконец вплотную, разрешить проблемы «геометрии в характеристике $p$», которые до тех пор казались вне пределов досягаемости любыми средствами, тогда известными[44].

В процессе нашего познания законов Вселенной (математических или каких еще) только *невинность*, и ничто другое, наделяет нас реформаторской властью. Та изначальная невинность, данная нам от рождения, какая обитает в каждом из нас, будучи зачастую объектом нашего же презрения и тайного страха. Она одна объединяет смирение и смелость, благодаря которым мы оказываемся способны проникнуть в суть вещей и впустить вещи внутрь себя, проникшись ими.

Эта власть — отнюдь не особый «дар», как, скажем, исключительная способность рассудка усваивать и управляться легко и ловко с впечатляющей массой известных фактов, идей и технических приемов. Подобные дары без сомнения драгоценны и уж, конечно, достойны зависти тех, кто (как я) не был от рождения наделен ими так щедро — «сверх всякой меры».

Все же не эти дары, и не честолюбие даже самое пылкое,

[44]Отчет об этом «бурном старте» теории схем был предметом моего доклада на Международном Конгрессе Математиков в Эдинбурге в 1958 г. Текст этого доклада мне представляется одним из лучших введений в теорию схем, способным (быть может) увлечь читателя-геометра идеей ознакомиться с внушительным трактатом (позднейшим) «Начала Алгебраической Геометрии», в котором тщательным образом (не опуская ни единой технической подробности) излагаются новые основы и новые методы алгебраической геометрии.

поддержанное непреклонной волей к успеху, позволяют перешагнуть «круги невидимые, но властные», ограждающие Вселенную. Только невинность сумеет их преодолеть, сама того не заметив и не слишком о том заботясь, в минуты, когда мы, с жадностью вслушиваясь в голоса вещей, предаемся во власть этой младенческой игры целиком…

## 12.

Новаторская идея схемы, как мы уже знаем, дала возможность связать между собой различные «геометрии», соответствующие различным простым числам (или различным «характеристикам»). Каждая из этих геометрий оставалась все еще существенно «дискретной», или «разрывной» по контрасту с традиционной геометрией, доставшейся нам в наследство от прошедших веков (начиная с Евклида). Новые идеи, введенные Зарисским и Серром, вернули в какой-то степени этим геометриям «непрерывное измерение», сразу же перехваченное «теоретико-схемной геометрией», пришедшей с целью их объединить. Но если говорить о «невероятных гипотезах» (Вейля), то до их подтверждения было еще очень далеко. «Топологии Зарисского» были с этой точки зрения настолько грубы, что оставались почти что на уровне «дискретных скоплений». Недоставало, очевидно, какого-то нового принципа, который позволил бы связать эти геометрические объекты (или «многообразия», или «схемы») с привычными («благонадежными») топологическими «пространствами»; скажем, такими, в которых «точки» отчетливо изолированы друг от друга, в то время как в пространствах-без-стыда-и-совести, введенных Зарисским, точки имеют досадную склонность склеиваться между собой…

Решительно, только появление «нового принципа», никак не меньше, могло устроить, чтобы «брачный союз числа и величины (размера)», или «геометрии разрывного» с «геометрией непрерывного» совершился — как то сулило некое предчувствие, впервые давшее о себе знать языком гипотез Вейля.

Понятие «пространства», без сомнения, одно из самых древних в математике. Оно является до такой степени основополагающим для нашего «геометрического» понимания мира, что принималось на веру, практически не требуя описаний, в течение более чем двух тысяч лет. И лишь в прошлом веке понятие это постепенно освободилось из-под тирании непосредственного восприятия (как единственно пространства, нас окружающего) и связанных с ним традиционных (евклидовых) теоретических разработок, чтобы обрести теперь уже свои собственные динамику и независимость. В наши дни оно входит в число понятий, наиболее часто и повсеместно используемых в математике, безусловно известных всем математикам без исключения. Понятие, впрочем, изменчивое, не поспоришь; у него сотни, тысячи обликов, в зависимости от того, какую структуру ему придать. Есть из них богатейшие (как почтенные «евклидовы» структуры, или «аффинные», или «проективные», или еще «алгебраические» структуры одноименных «многообразий»; эти обобщают все предыдущие, придавая им гибкость), есть аскетически строгие. Последние таковы, что всякий элемент информации «качественной» из них словно бы исчез безвозвратно, и присутствует лишь намек на количественную сущность понятия *близости*, или *предела*[45], и наличествует лишь вернее всего ускользающая от интуиции («топологическая») версия понятия *формы*. Наиболее безыскусное среди всех, *топологическое пространство* в течение истекшей половины столетия играло роль своего рода широкого лона общих концепций, охватывающих

[45]Говоря о понятии «предела», я подразумеваю здесь в первую очередь «предельный переход», скорее чем понятие «границы» (которое ближе нематематику).

все прочие структуры. Изучением таких пространств занимается одна из самых увлекательных, самых животрепещущих ветвей геометрии: *топология*.

Как ни неуловима могла казаться сначала структура «чистого качества», воплощенная в «пространстве» (называемом «топологическим»), при отсутствии каких бы то ни было данных количественной природы (как расстояние между двумя точками, в частности), которые дали бы нам возможность уцепиться за сколько-нибудь привычное интуитивное представление о «величине», или «малости», — в течение минувшего века удалось наконец загнать эти пространства в плотные и гибкие ячейки языка, тщательно «скроенного из кусочков». Более того, изобрели и изготовили целиком эталоны «метра», или «сажени», именно затем, чтобы, всему наперекор, навязать что-то вроде «мер» (названных «топологическими инвариантами») этим пространствам-спрутам, которые, подобно неуловимым призрачным городам, казалось, ускользали при всякой попытке нанести их на карту с масштабом. Правда, основная часть этих инвариантов, притом самых существенных, более тонкой природы, чем просто «число», или «величина». Скорее, они сами представляют собой более или менее прихотливые структуры, привязанные (посредством конструкций той или иной степени сложности) к пространству, о котором идет речь. Один из самых давних и важнейших таких инвариантов, введенный еще в предыдущем столетии (итальянским математиком *Бетти*), образован различными «группами» (или «линейными пространствами») — так называемыми «когомологиями», соответствующими данному пространству[46]. Это они подают голос (правда, в основном «между строк») в гипотезах Вейля, являясь для них

[46]По правде говоря, инварианты, введенные Бетти, были *гомологиями*. *Когомологии*, более или менее эквивалентные им, «дуальные» понятия, были введены гораздо позднее. Этот аспект обрел превосходство над началь-

глубоким «оправданием бытия» и придавая им (по крайней мере для меня, «впутанного в это дело» объяснениями Серра) полный их смысл. Но возможность связать эти инварианты с «абстрактными» алгебраическими многообразиями, о которых шла речь в этих гипотезах, способом в точности отвечающим

---

ным, «гомологическим», главным образом, бесспорно, вслед за введением Жаном Лерэ точки зрения, основанной на понятии пучка, о чем говорится ниже. В техническом отношении можно сказать, что огромная часть моего труда в области геометрии состояла в извлечении на свет и развитии в тех или иных пределах недостающих когомологических теорий для пространств и многообразий всех видов, прежде всего «алгебраических многообразий» и схем. Мне привелось, прокладывая дорогу, истолковать традиционные гомологические инварианты в терминах когомологических, и тем самым представить их в совершенно новом свете.

Есть много других «топологических инвариантов», введенных топологами, чтобы подступиться к того или иного рода свойствам топологических пространств. Если не говорить о «размерности» пространства и (ко)гомологических инвариантах, первые из числа прочих инвариантов — «гомотопические группы». Я ввел новый инвариант в 1957 году: группу $K(X)$ (так называемую «группу Гротендика»), которой сразу же посчастливилось получить признание и чья значимость (как для топологии, так и в арифметике) не устает подтверждаться снова и снова.

Множество новых инвариантов, по своей природе изощренней тех, что в наше время известны и используются, но по моему ощущению совершенно фундаментальных, намечено в моей программе по «ручной топологии» (ее краткий обзор включен в «Набросок Программы», который войдет в четвертый том «Раздумий»). Эта программа основывается на понятии «ручной теории», или «ручного пространства», которое представляет собой, в чем-то как и понятие топоса, (вторую) «метаморфозу понятия пространства». Оно намного прозрачнее (как мне кажется) и не такое глубокое, как это последнее. Я, однако, предвижу, что его воздействие на топологию «собственно говоря» определенно должно быть еще значительней, и что благодаря ему «ремесло» геометра-тополога изменится целиком, сверху донизу — путем глубокого преобразования концептуального контекста, в котором он работает. (Как это уже случилось с алгебраической геометрией после введения точки зрения теоретико-схемной.) Я послал свой «Набросок» нескольким старым друзьям и известным топологам, но непохоже, чтобы содержание их сколько-нибудь заинтересовало…

прозвучавшим там требованиям, оставалась не более чем надеждой. Сомневаюсь, что кто-либо помимо Серра и меня самого (даже — и в первую очередь — лично Андрэ Вейль!)[47] мог в нее верить...

Незадолго до этого наше представление об этих инвариантах оказалось значительно обогащенным и обновленным работами *Жана Лерэ* (написанными в плену в Германии, во время войны, в первой половине сороковых). Существенно новаторской была идея *пучка* (абелева) над пространством, с которым Лерэ связал соответствующие «группы когомологий» (так называемые «когомологии с коэффициентами в пучке»). Это было как если бы старый добрый, «когомологический», эталон метра, которым располагали до сих пор для «измерения» пространства, превра-

[47]Парадоксально, у Вейля был прочный «барьер», очевидно, инстинктивный, против когомологического формализма — при том, что именно его прославленные гипотезы в значительной мере послужили основой для развития важнейших когомологических теорий в алгебраической геометрии, начиная с 1955 года (первоначальным толчок процессу был дан Серром, с его основополагающей статьей АКП, уже упоминавшейся в одной из предыдущих сносок).

Мне представляется, что этот «барьер» у Вейля был частью общей неприязни ко всякого рода «нагромождениям», ко всему, что приходилось сродни формализму (и не могло быть изложенным на нескольких страницах), или «конструкции», сколько-нибудь запутанной. В нем определенно не было ничего от «строителя», и очевидно, что именно против воли он был принужден в течение тридцатых-сороковых годов заниматься развитием первоначальных основ «абстрактной» алгебраической геометрии, которые (ввиду степени его расположенности к этому труду) явились воистину «Прокрустовым ложем» для потребителя.

Я не знаю, желал ли он, чтобы я пошел дальше и вложил свои силы в построение больших зданий, которые позволили бы мечтам Кронекера и его собственным воплотиться в языке и инструментах изощренных и эффективных. Он ни словом не откомментировал ни тот труд, в который видел меня погруженным, ни уже готовые части работы. Так же не получил я и отклика на «РС», экземпляр которых послал ему больше чем три месяца назад, с теплой дарственной надписью, сделанной от руки.

тился вдруг в невообразимое множество новых «метров» всевозможной величины, формы и содержания, каждый внутренне приспособленый к рассматриваемому пространству, о котором поставляет нам сведения с безупречной точностью, причем такие, какие может дать только он один. Это была главная идея в глубоком преобразовании нашего подхода к пространствам всех видов и, безусловно, одна из важнейших идей, появившихся в течении этого столетия. Благодаря прежде всего последующим работам Жан-Пьера Серра, идеи Лерэ уже в первое десятилетие после своего появления на свет принесли такие плоды, как впечатляющий прорыв в развитии теории топологических пространств (и в частности их инвариантов, называемых «гомотопическими», тесно связанных с когомологиями), и другой, не менее важный, прорыв в так называемой «абстрактной» алгебраической геометрии (с основополагающей статьей «АКП» Серра, опубликованной в 1955 г.). Мои собственные работы по геометрии, начиная с 1955 года, шли в продолжение этих трудов Серра и, тем самым, новаторских идей Лерэ.

## 13.

Точка зрения и язык пучков, введенные Лерэ, заставили нас рассмотреть «пространства» и «многообразия» всех родов в новом свете. Они не затрагивали, однако, самого понятия пространства, ограничиваясь тем, что предоставили нам возможность, вглядевшись новыми глазами, достичь более тонкого понимания устройства традиционных «пространств», уже всем знакомых. Однако это понятие пространства оказалось неадекватным для того, чтобы дать отчет о наиболее существенных «топологических инвариантах», выражающих «форму» абстрактных алгебраических многообразий (с которыми связаны гипотезы Вейля), даже «схем» вообще (обобщающих старинные многообразия). Для ожидаемого «союза» числа и величины (размера) это ложе было бы решительно тесновато: на нем сумел бы с грехом пополам устроиться разве что один из будущих супругов (именно, невеста), но никак не оба сразу! «Новый принцип», который еще оставалось найти, чтобы свадьба, обещанная добрыми феями, совершилась, был попросту иным, просторным *ложем*, которому недоставало лишь новобрачных — и никто его не замечал до некоторых пор…

Эта «двуместная кровать» возникла (как по мановению волшебной палочки) с появлением идеи *топоса*. Эта идея охватывает в общетопологической интуиции как традиционные топологические пространства, олицетворяющие мир непрерывной величины, вместе с (самозванными) «пространствами» (или «многообразиями») неприкаянных служителей абстрактной алгебраической геометрии, так и бесчисленное множество других типов структур, до тех пор казавшихся безнадежными пленниками «арифметического мира» систем «разрывных», или «дискретных».

Концепция пучков и была тем безмолвным вожатым, тем действенным ключом (отнюдь не тайным), приведшим меня, не петляя и без проволочек, к супружеской опочивальне с просторным брачным ложем. Места в самом деле довольно; это ведь как широкая тихая река, чьи воды до того глубоки, что

> «Всем царским коням заодно
> Допить до дна бы мудрено…»

— как поется в старинной песенке, которую ты наверное певал и сам, или по меньшей мере слышал. И тот, кто спел ее первым, верней ощутил бы скрытую красоту и спокойную силу топоса, чем любой из моих ученых коллег, прежних учеников и друзей…

Ключ был один и тот же — как при первоначальном, предварительном подходе (через посредство весьма удобного, но менее подлинного понятия «ситуса»), так и в случае топоса. Идею топоса я хотел бы сейчас попытаться описать.

Рассмотрим совокупность *всех* пучков над заданным (топологическим) пространством, или, если угодно, тот диковинный арсенал, образованный *всеми* эталонами метра, служащими для его измерения[48]. Мы рассмотрим эту «совокупность», или «арсенал», как снабженный наиболее очевидной структурой, которую ему можно приписать, так сказать, «на глазок» — именно, структурой, называемой «категорией». (Читателю, не знакомому с термином в техническом смысле, не о чем беспокоиться. Это совсем не понадобится в дальнейшем.) Это нечто вроде «сверхструктуры измерения» по имени «категория пучков» (над рассматриваемым пространством), которая впредь будет считаться как бы «воплощающей» то, что наиболее существенно для пространства. Это законно (с точки зрения «математического здравого смысла»), поскольку оказывается возможным «воссоздать» полностью исходное топологическое пространство[49] в терминах «категории пучков» (или арсенала измерительных приборов), ему соответствующей. (Проверить это — простое упражнение; конечно, когда вопрос уже поставлен…) Ничего больше не нужно для уверенности в том, что (если это почему-либо для нас заманчиво) мы отныне можем «забыть» об исходном пространстве, чтобы

[48](Предназначено для математика.) По правде говоря, здесь речь идет о пучках *множеств*, а не о *пучках абелевых групп*, введенных Лерэ как самые общие коэффициенты «теории когомологий». Думаю, что я первым начал систематически работать с пучками множеств (начиная с 1955 года, в моей статье «Общая теория расслоенных пространств со структурным пучком», изданной в Канзасском Университете).

[49](Предназначено для математика.) Строго говоря, это справедливо лишь для пространств, называемых «трезвыми». Они, однако же, составляют почти все типы пространств, с какими обыкновенно сталкиваешься — в частности, таковы все «отделимые» пространства, излюбленные аналитиками.

держать в уме и использовать только соответствующую «категорию» (или «арсенал»), которая будет рассматриваться как наиболее адекватное олицетворение топологической (или «пространственной») структуры, о выражении которой идет речь.

Как это часто бывает в математике, нам удалось (благодаря решающему влиянию идеи о пучке, или «когомологическом метре») выразить некоторое понятие («пространства», в данном случае) в терминах другого («категории»). Всякий раз открытие такого *перевода* понятия (отражающего определенное положение вещей) на язык другого понятия (соответсвующего ситуациям иного типа) обогащает наше представление о каждом из них путем неожиданного слияния особенностей интуитивного восприятия, характерных для одного и другого. Так, ситуация по природе «топологическая» (воплощенная в данном пространстве) оказывается здесь представленной ситуацией по природе «алгебраической» (воплощенной в «категории»); или, если угодно, «непрерывное», воплощенное в образе пространства, предстает «переданным», или «выраженным» структурой категории, по природе «алгебраической» (воспринимавшейся до сих пор как существенно «разрывная», или «дискретная»).

Более того, первое из этих понятий — пространства — казалось нам в каком-то смысле понятием (по содержательности) «максимальным» — настолько уже обобщенным, что едва ли можно себе представить его расширение, которое оставалось бы в рамках «разумного». Напротив, другая сторона зеркала[50], эти «категории» (или «арсеналы»), с которыми сталкиваются, сойдя с крыльца топологических пространств, имеют весьма частную природу. Они располагают в действительности набо-

[50]«Зеркало», о котором речь, таково, что если поместить перед ним пространство, оно даст (как в «Алисе в стране чудес») в качестве «отражения» соответствующую категорию, рассматриваемую как что-то вроде «двойника» пространства, «другой стороны зеркала»...

ром свойств в высшей степени типических[51], что делает их как бы «имитациями» самой простой из них, какую только можно вообразить — той, которую получают, исходя из пространства, сведенного к одной точке. То есть «пространство в новом стиле» (или *топос*), обобщающее традиционные топологические пространства, будет описываться попросту как «категория», которая, не вытекая с необходимостью из обыкновенного пространства, тем не менее обладает всеми хорошими свойствами (единожды четко для всех определенными, разумеется) этой «категории пучков».

* *

*

Вот это и есть новая идея. Ее возникновение можно рассматривать как результат наблюдения, сказать по правде, почти детской простоты, что то, что на самом деле важно в топологическом пространстве — это отнюдь не его «точки» и не его «подмножества»[52] с отношениями близости между ними, но *пучки* над этим пространством и *категория*, которую они образуют. В том, чего я добился, я лишь довел до логического конца исходную идею Лерэ — тем самым переступил нечто, *решившись сделать шаг.*

Как сама идея о пучках (принадлежащая Лерэ), или о схемах, как всякая «большая идея» (концепция), которая переворачивает

[51](Предназначено для математика.) Здесь речь идет прежде всего о свойствах, которые я ввел в теорию категорий под названием «свойства точности» (одновременно с современным категорным понятием общих индуктивных и проективных «пределов»). См. русский перевод «О некоторых вопросах гомологической алгебры», Библиотека сборника «Математика», Москва, 1961.

[52]Так, можно построить топос весьма «объемный», в котором будет только одна «точка» — или вовсе ни одной!

вверх дном закоснелое, устоявшееся мировосприятие, идея топоса ошеломляет своей естественностью, «очевидностью», простотой (на грани, я бы сказал, наивности и простоты даже «глуповатой») — тем особенным свойством, которое так часто вынуждает нас восклицать: «О, это невозможно!» — полуразочарованно, полузавистливо, еще, пожалуй, с оттенком, который можно передать словами «сумасбродно», «несерьезно», припасенными у всех, кто в ужасе шарахается, неожиданно столкнувшись с чем-то простым до неприличия. С тем, что нам напоминает, быть может, дни нашего младенчества, спрятанные глубоко в памяти, ибо мы давно от них отреклись…

## 14.

Понятие схемы представляет собой значительное расширение понятия алгебраического многообразия, и за счет этого полностью обновляет алгебраическую геометрию, завещанную моими предшественниками. Понятие топоса — расширение или, лучше сказать, *метаморфоза понятия пространства*. Тем самым оно обещает произвести сходное обновление топологии и, за ее пределами, геометрии. Уже сейчас, впрочем, оно успело сыграть решающую роль для расцвета новой геометрии (главным образом через посредство вышедших из него тем $l$-адических и кристальных когомологий, позволивших доказать гипотезы Вейля). Идея топоса, как и ее старшая сестра (почти близнец), имеет две дополняющие друг друга черты, существенные для полного и плодотворного обновления; вот они.

Во-первых, новое понятие *не чересчур широко*, в том смысле, что на новые «пространства» (лучше называть их топосами, чтобы не задеть чуткого уха)[53] самые важные интуитивные

[53]Название «топос» было выбрано (в связи с понятием «топология» или

представления и геометрические конструкции[54], знакомые по старым добрым пространствам прежних времен, переносятся более или менее очевидным образом. Иначе говоря, для новых объектов имеется в распоряжении вся богатая гамма мысленных образов и ассоциаций, понятий и определенных технических средств, какие прежде не выходили за границы области объектов старинного толка.

Во-вторых, новое понятие в то же время *достаточно широко*, чтобы охватить все множество ситуаций, в которых, как раньше считалось, не место интуитивным представлениям «тополого-геометрической» природы — именно, тем, какие тогда связывались только с обыкновенными топологическими пространствами (и не без основания...).

С позиции гипотез Вейля решающим здесь является то обстоятельство, что новое понятие в действительности достаточно широко для того, чтобы позволить нам связать с любой «схемой» такое «обобщенное пространство», или «топос» (называемое «этальным топосом» рассматриваемой схемы). С самого начала было похоже, что определенные «когомологические инварианты» этого топоса (все, что есть внутри у этой смешной игрушки!) имели неплохой шанс

---

«топологический»), чтобы наводить на мысль о том, что речь идет об объекте, в полном смысле слова относящемся к области топологической интуиции. По обилию мысленных образов, которые слово «топос» вызывает, его можно рассматривать как более или менее эквивалент термину «пространство» (топологическое), просто сильнее подчеркивая «топологическую» специфику понятия. (Так, есть «векторные пространства», но не «векторные топосы», вплоть до нового распоряжения!) Необходимо сохранить оба выражения, каждое со своей спецификой.

[54]Среди них есть, в частности, конструкции известных «топологических инвариантов», переведенные на новый язык инвариантами когомологическими. Для этих последних я сделал все, что требовалось, — в статье, уже упоминавшейся («О некоторых вопросах гомологической алгебры», 1961) — чтобы придать им смысл для любого топоса.

обеспечить все необходимое для раскрытия полного смысла этих гипотез, и (кто знает!) предоставить, быть может, средства для их доказательства.

Впервые в моей жизни как математика я пользуюсь досугом, чтобы вызвать в памяти и (хотя бы только для себя самого) перенести на эти страницы совокупность главных тем и больших идей, направлявших мой труд. Это помогает мне лучше оценить место и значение каждой из этих тем, и «точек зрения», ими олицетворяемых, в большом геометрическом видении, которое их объединяет и из которого они вытекают. Именно благодаря этой работе явились во всем блеске две новаторские идеи, два двигательных нерва первого и бурного расцвета новой геометрии: идея *схем* и *топосов*.

Глубочайшей из двух мне сейчас представляется идея топосов, то есть вторая. Если бы случилось так, что в конце пятидесятых годов я бы *не* засучил рукава, чтобы затем упорно, день за днем, на протяжении двенадцати долгих лет развивать «теоретико-схемный инструмент», по изяществу и мощности совершенный — мне и тогда представляется почти немыслимым, чтобы за десять или двадцать последующих лет другие сумели бы удержаться и не взяться (хоть бы и против воли) за введение в окончательной форме понятия, которое очевидно напрашивалось, не соорудить как-нибудь пускай самых ветхих бараков из «сборных элементов», если не просторные и удобные жилища, как те, какие я собрал по камешкам и воздвиг своими руками. Но ни единого исполнителя не встретил я на математической сцене за три истекших десятилетия, который мог бы обладать такой наивностью, или невинностью, чтобы сделать (вместо меня) этот *иной* шаг, среди всех решающий, введя столь детски простую идею топосов (или хотя бы «ситусов»). И даже если предположить, что она со скрытым в ней робким обещанием уже кем-то любезно предоставлена — я не видел, будь то среди прежних моих друзей или учеников, никого, кто обладал бы достаточной смелостью, и прежде всего *верой*, чтобы довести до конца эту скромную идею[55] (до того с виду смехотворную, в то время как цель казалась удаленной бесконечно...): с первых ее неловких шагов до полной зрелости «искусства этальных когомологий», каковым она стала в моих руках, в течение последующих лет.

## 15.

Да, река глубока; широки и спокойны воды моего детства, в царстве, как я думал, давно мною покинутом. Все царские кони могли бы прийти к ней заодно, и пить вволю, досыта, допьяна, никогда ее не исчерпав! Воды ее текут из ледников, жгучие, как дальние снега, и есть в них сладость глиняных равнин. Я только что говорил об одном из тех коней, которого ребенок привел напоить к реке, и тот пил в свое удовольствие, долго, не торопясь. Я видел там другого, пришедшего как-то по следам того же мальчишки напиться вдоволь, если повезет — но он едва успел хлебнуть из реки. Должно быть, кто-то спугнул его. И это все, много ли сказать. Издалека я смотрел, однако,

[55](Предназначается для читателя-математика.) Когда я говорю «довести до конца эту скромную идею», то имею в виду идею этальных когомологий, как подход к гипотезам Вейля. Именно под этим лозунгом произошло открытие мною понятия ситуса в 1958 году и дальнейшее развитие его (или очень близкого к нему понятия топоса) и формализма этальных когомологий под моим руководством (с помощью нескольких сотрудников, о которых я скажу в свое время) между 1962 и 1966 годами.

Говоря о «смелости» и «вере», я веду речь о качествах «нетехнической» природы, мне здесь представляющихся весьма существенными. Могу добавить к их перечню, из другой области, то, что я бы назвал «когомологическим чутьем», то есть интуицией особого рода, выработавшейся во мне при построении когомологических теорий. Я думал передать ее своим ученикам, занимающимся когомологиями. В перспективе шестнадцати лет, считая от моего ухода с математической сцены, констатирую, что ни в одном из них она не сохранилась.

как табуны лошадей, мучимых жаждой, числом несметные, блуждали по равнине. Но не далее как сегодня утром их ржание разбудило меня, сорвав с постели в неурочный час — меня, которому перевалило за шестьдесят, привыкшего к покою. Что же делать, я должен был встать. Горько было видеть их отощавшими клячами, в то время как ни в хорошей воде, ни в зеленых пастбищах не было недостатка. Но словно бы злые чары чьей-то враждебной тенью упали с небес, стремясь представить дело иначе — окутать надменным холодом все, что я знал теплым и гостеприимным, и закрыть подступы к щедрым водам. Или то проделки барышника, обман, подстроенный, чтобы сбить цену — кто знает? Или вдруг сталось так, что в царской земле нет больше детей, чтобы отвести коней к водопою? Ведь жаждущему коню нужен мальчишка, тот, кто отыщет дорогу к реке...

## 16.

Идея топоса произошла от идеи схем, и в самый год появления схем, но по значимости далеко превзошла родительницу. Именно тема топоса, и никакая другая, стала «брачным ложем» геометрии и алгебре, топологии и арифметике, математической логике и теории категорий, миру непрерывного и государству структур «разрывных», или «дискретных» (полноводная река — она же...). Если теория схем — *сердце* новой геометрии, тема топоса — ее телесная оболочка, или *жилище*. Это то, что я задумал как самое обширное, чтобы уловить с изысканной точностью и передать языком, богатым геометрическими созвучиями, общую «суть» самых несхожих друг с другом ситуаций, из тех, что то и дело складываются в различных областях просторной математической вселенной.

Тема топоса, однако, слишком далека от того, чтобы познать успех, выпавший на долю схем. Я несколько раз при случае поговорю об этом на страницах «РС»; здесь же не место задерживаться на нелепых превратностях судьбы, поразивших это понятие. Две главные темы новой геометрии вышли все же из темы топоса, две дополняющие друг друга «когомологические теории», задуманные с целью обеспечить подход к гипотезам Вейля: *тема этальная* (или *$l$-адическая*) и *тема кристаллов*. Первая из них оформилась в моих руках в $l$-адический когомологический инструмент; похоже, что сейчас это один из мощнейших математических инструментов столетия. Что же до темы кристаллов, чье существование свелось после моего ухода почти к оккультному, она под конец была эксгумирована под светом рампы и под видом заимствования, при обстоятельствах еще более странных, чем те, что сложились вокруг топоса.

$l$-адический когомологический инструмент стал, как я и предвидел, основным инструментом доказательства гипотез Вейля. Я сам доказал немалую их часть, и последний шаг был довершен мастерски, три года спустя после моего ухода, Пьером Делинем, самым блестящим из моих учеников-«когомологистов».

Я, впрочем, сформулировал к 1968 году более сильную и, главное, более геометрическую версию гипотез Вейля. Они оставались «подпорченными» (если можно так выразиться!) необоримым арифметическим привкусом, хотя, конечно, самый дух этих гипотез в том, чтобы выразить и уловить «арифметическое» (или «дискретное») через посредство «геометрического» (или «непрерывного»)[56]. В этом смысле вариант гипотез,

[56](Предназначено для математика.) Гипотезы Вейля находятся в зависимости от предположений арифметической природы: именно, рассматриваемые в них многообразия должны быть определены над *конечным* полем. С точки зрения когомологического формализма это приводит к тому, что особое место получает *эндоморфизм Фробениуса*, соответствующий данной ситуации. При моем подходе ключевые свойства (типа «обобщенной торемы об индексе») связаны с *произвольными* алгебраическими соответствиями и не требуют никаких ограничений арифметической природы над

предложенный мной, представляется мне более «верным» философии Вейля, чем его собственный вариант — философии, никогда не записанной на бумаге и редко проступавшей в речи, и ставшей, быть может, *главной* (невысказанной) мотивацией к необычайному расцвету новой геометрии в течение четырех истекших десятилетий[57]. Моя переформулировка состоит, по сути, в извлечении «квинтэссенции» того, что остается применимым в рамках алгебраических многообразий, называемых «абстрактными», классической теории Ходжа, имеющей дело с «обыкновенными» алгебраическими многообразиями[58]. Я назвал «стандартными гипотезами» (для алгебраических циклов) эту новую, совершенно геометрическую, версию знаменитых гипотез.

По моему ощущению, это был новый шаг, после развития когомологического $l$-адического инструмента, по направлению к этим гипотезам. Но в то же время и прежде всего, это был один из возможных принципов подхода к тому, что мне также представляется глубочайшей из тем, введенных мной в математику[59]: к теме *мотивов* (порожденной «когомологической $l$-адической темой»). Эта тема — как *сердце*, или

---

основным полем, предварительно заданным.

[57]При этом после моего ухода в 1970 году весьма четко наметилось движение реакции, которое вылилось в ситуацию относительного застоя, о которой я не раз упомяну при случае на страницах «РС».

[58]«Обыкновенные» значит здесь: «определенные над полем комплексных чисел». Теория Ходжа (называемая также гармоническими интегралами) была мощнейшей из известных когомологических теорий в контексте комплексных алгебраических многообразий.

[59]Эта тема — наиболее глубокая по крайней мере за весь «открытый» период моей математической деятельности, между 1950 и 1969 годами, то есть вплоть до того момента, как я оставил математическую сцену. Я считаю тему анабелевой алгебраической геометрии и теорию Галуа-Тейхмюллера, получившие развитие начиная с 1977 года, сравнимыми с ней по значению.

душа, самая затаенная, лучше всего скрытая от взгляда часть теории схем, которая сама по себе — ядро нового видения. И сколько ни есть ключевых явлений в стандартных гипотезах[60], они могут рассматриваться как составляющие нечто вроде последней квинтэссенции темы мотивов, как *вдохновение*, жизненно важное для самой хрупкой и изощренной из всех тем, «ядра в ядре» новой геометрии.

Вот, в общих чертах, суть вопроса. Мы уже видели, как важно (в особенности с точки зрения гипотез Вейля) для простого числа $p$ уметь построить «когомологические теории» для «многообразий (алгебраических) в характеристике $p$». Знаменитый «когомологический $l$-адический инструмент» предоставляет именно такую теорию, и даже *бесконечное множество различных когомологических теорий*, каждая из которых соответствует какому-нибудь простому числу $l$, отличному от характеристики $p$. Очевидно, здесь есть «недостающая теория», соответствующая случаю равенства между $l$ и $p$. Чтобы с этим справиться, я нарочно выдумал другую когомологическую теорию (которая уже недавно упоминалась), называемую «теорией кристальных когомологий». Впрочем, для важного случая бесконечного $p$ имеются в распоряжении еще три когомологические теории[61] — и никакой гарантии, что не придется рано или поздно ввести новые когомологические теории с со-

[60](Предназначается для читателя, занимающегося алгебраической геометрией.) В свое время будет приведена формулировка этих гипотез. Для более подробных комментариев см. «Обзор построек» (РС IV, примечание $n^\circ$ 178, стр. 1215–1216) и сноска на стр. 769 в разделе «Убеждение и знание» (РС III, примечание $n^\circ$ 162).

[61](Предназначается для читателя-математика.) Эти теории соответствуют, по порядку, *когомологиям Бетти* (определенным с трансцендентной точки зрения, с помощью вложения основного поля в поле комплексных чисел), *когомологиям Ходжа* (определенным Серром) и *когомологиям де Рама* (определенным мной); две последние относятся еще к пятидесятым годам (а теория Бетти — к предыдущему столетию).

вершенно аналогичными формальными свойствами. В противовес тому, что творится в обычной топологии, здесь мы поставлены перед фактом ошеломляющего изобилия различных когомологических теорий. Обрисовывается вполне отчетливое ощущение (сначала оно было довольно туманным), что все теории стремятся «свестись к одной», что они «дают одни и те же результаты»[62]. Именно затем, чтобы выразить это интуитивное ощущение «родства» между различными когомологическими теориями, я вывел на свет понятие *мотива*, отвечающего алгебраическому многообразию. Этим термином я хотел навести на мысль, что речь идет об «общем мотиве» (или «общей причине»), скрытом в глубине огромного множества различных априори возможных когомологических инвариантов. Эти различные когомологические теории стали бы, как тематические разработки, каждая в «темпе», «ключе» и «ладу» («мажорном» или «минорном»), какие ей подобают — одного и того же «основного мотива» (называемого «*мотивной* когомологической теорией»), который в то же время является наиболее фундаментальным, или самым «утонченным» из всех этих раз-

[62](Предназначается для читателя-математика.) Например, если $f$ — эндоморфизм алгебраического многообразия $X$, индуцирующий эндоморфизм пространства когомологий $H^i(X)$, «характеристический многочлен» последнего должен быть многочленом с *целыми* коэффициентами, не зависящими от выбора конкретной когомологической теории (например, $l$-адической для различных $l$). То же верно для общих алгебраических соответствий, если $X$ собственное и гладкое. Печальная истина (дающая представление о плачевном состоянии заброшенности когомологической теории алгебраических многообразий в характеристике $p > 0$, считая с моего ухода) состоит в том, что это не доказано по сей день даже для частного случая, когда $X$ есть гладкая проективная *поверхность* при $i = 2$. В действительности, насколько мне известно, никто после моего ухода не соизволил поинтересоваться этим важнейшим вопросом, типичным из тех, что вытекают из стандартных гипотез. Согласно велению моды, единственный эндоморфизм, достойный внимания — это эндоморфизм Фробениуса (с которым, отчасти, сумел разделаться Делинь, подручными средствами…).

личных «воплощений» темы (то есть из всех возможных когомологических теорий). Так, мотив, соответствующий алгебраическому многообразию, образовывал бы «окончательный», «в полном смысле этого слова», когомологический инвариант, из которого все прочие (соответствующие всевозможным когомологическим теориям) выводились бы, как «воплощения» музыкальной темы, ее различные «реализации». Все важнейшие свойства когомологий многообразия проявлялись бы (или «слышались бы») уже в соответствующем мотиве, как если бы знакомые свойства и структуры на отдельных когомологических инвариантах ($l$-адических или кристальных, например), стали бы попросту точными отражениями свойств и структур, *заключенных в мотиве*[63].

[63](Предназначается для читателя-математика.) Другой способ представить себе категорию мотивов над полем $k$ — рассмотреть ее как что-то вроде «обертывающей абелевой категории» для категории отделимых схем конечного типа над $k$. Мотив, соответствующий такой схеме $X$ (или «мотивные когомологии $X$», которые я обозначаю $H^*_{mot}(X)$) оказывается, таким образом, некоей абелианизированной «аватарой» $X$. Самое важное здесь, что совершенно так же, как алгебраическое многообразие $X$ поддается «непрерывной деформации» (его класс изоморфизма зависит от непрерывных «параметров», или «модулей»), мотив, соответствующий $X$, или, более общо, «переменный» мотив, также поддается непрерывной деформации. Этот аспект мотивных когомологий находится в разительном контрасте с тем, что происходит со всеми классическими когомологическими инвариантами, в том числе $l$-адическими, за единственным исключением когомологий Ходжа комплексных алгебраических многообразий.

Это дает представление о том, до какой степени «мотивные когомологии» суть более тонкий инвариант, окруженный «арифметической формой» (если возможно отважиться на такое выражение) многообразия $X$ куда плотнее, чем традиционные инварианты, чисто топологические. В моем восприятии мотивов они представляются, как что-то вроде «пуповины», незаметной, скрытой от взгляда, который связывает алгебро-геометрические свойства алгебраического многообразия со свойствами «арифметической» природы, воплощенными в его мотиве. Последний может рассматриваться, как объект, по духу «геометрический», но в котором «арифметические» свойства, Вот, выраженная языком не математической техники, но музыкальной метафоры, квинтэссенция еще одной идеи младенческой простоты, тонкой и смелой одновременно. Я развивал эту идею в рамках основных задач, которые считал наиболее неотложными, под заголовком «теория мотивов», или «философия (йога) мотивов», во все время с 1963 по 1969 год. Эта теория, с ее завораживающим структурным богатством, во многом остается еще на стадии предположений[64].

Я несколько раз говорю на страницах «РС» о «йоге мотивов» — о том, что представляется мне особенно важным. Здесь излишне рассуждать о том, о чем уже сказано в другом месте. Достаточно указать, что сами «стандартные гипотезы» берут начало в мире йоги мотивов, вытекая из нее естественным образом. В то же время они предоставляют принцип подхода к одной из возможных конструкций понятия мотива.

---

определяемые геометрией, оказываются, так сказать, «обнаженными» и выставленными напоказ.

Итак, мотив представляется как глубочайший «инвариант формы» из тех, что вплоть до настоящего момента удавалось связать с алгебраическим многообразием, помимо его «мотивной фундаментальной группы». И тот и другой инварианты предстают передо мной, как «тени», проявления «мотивного гомотопического типа», которые остается описать (и о которых я скажу несколько слов в примечании «Обзор построек, или инструменты и видение» (РС IV, $n^\circ$ 178, см. постройка 5 (Мотивы), и в особенности стр. 1214)). Именно этот последний объект, мне кажется, должен стать наиболее совершенным воплощением ускользающего интуитивного представления об «арифметической (или мотивной) форме» произвольного алгебраического многообразия.

[64] Я излагал свою точку зрения на мотивы тем, кто желал выслушать, на протяжении всех этих лет, не взяв на себя труда что бы то ни было опубликовать на этот предмет (в других насущных вопросах не было недостатка). Позже это дало возможность кое-каким из моих учеников «заимствовать» с пущей непринужденностью, под трогательным присмотром всех разом моих старинных друзей, прекрасно знакомых с истинным положением дел. (См. последующую сноску.)

Эти гипотезы мне казались, кажутся и сейчас, одним из двух наиболее основополагающих вопросов алгебраической геометрии. Ни они, ни другая, также важнейшая, проблема (так называемая «проблема разрешения особенностей») не разрешены до сих пор. Но в то время как вторая из них высится, сегодня, как и сто лет назад, громадой великолепной и грозной, те, что я имел честь поставить, неоспоримым приговором моды отнесены (в годы, последовавшие за моим уходом с математической сцены, и в точности как собственно тема мотивов[65]) к разряду прелестной гротендической чепухи. Но я снова забегаю вперед...

## 17.

По правде сказать, я не так уж много и подробно раздумывал над гипотезами Вейля. Иная, широкая панорама уже начинала разворачиваться передо мной. Я старался уловить взглядом все, что мог, и изучить тщательно, ничего не упустив. То, что я видел перед собой, выходило далеко за пределы (предположительных) нужд доказательства, оставляя позади даже то многое, что можно было предвидеть, вооружившись оптикой этих гипотез. С появлением теорий схемы и топоса мне вдруг открылся новый, неожиданный мир. «Гипотезы», бесспорно, занимали в нем центральное положение: как столица обширной империи, где не счесть провинций. Но, как правило, между

[65]В действительности, эта тема была эксгумирована в 1982 году (годом позже, чем тема кристаллов) под тем же названием на этот раз (и в более узкой форме: дело ограничивалось случаем основного поля характеристики нуль), только имя задумавшего ее работника не произносилось. Это один пример из множества прочих, когда тема или понятие, похороненные тут же после моего ухода как безумные гротендические причуды, бывали извлечены из могил одна за другой некоторыми из моих учеников в ходе десяти-пятнадцати последующих лет со скромным достоинством и (нужно ли уточнять) без упоминания работника...

этим почтенным, великолепным городом и отдаленными областями огромной страны нет настоящей связи: дальние дороги, ненадежная почта… Прямо себе этого не говоря, я все же знал, что отныне служу великой задаче. Мне предстояло исследовать огромный, неведомый мир: изучить его географию, вплоть до самых удаленных границ, исходить все дороги; тщательно, одну за другой, описать ближайшие, наиболее доступные провинции. И все свои находки нанести на карту — как можно точнее и подробнее, до последней деревушки, до самой скромной хижины в ней.

На эту-то работу в основном и уходили мои душевные силы. То был терпеливый и долгий труд по закладке основ, который я один перед собой видел ясно, и, главное, «нутром чувствовал». Далеко опередив в этом отношении все остальные задачи, он забрал себе наиболее внушительную часть моего времени, между 1958 (когда, одна за другой, появились теории схем и топосов) и 1970 (годом моего ухода с математической сцены).

Впрочем, я нередко в нетерпении грыз удила, проклиная каждую задержку. Эти бесконечные задачи давили мне на плечи неотвязным, назойливым грузом. Ведь, как только по сути в них разберешься, новизна пропадает, а то, что остается на ее месте, льнет к рукам бытовой рутиной. И тогда — какой уж там бросок в неизвестное! Так, хлопоты по хозяйству… Вот и приходилось постоянно сдерживать в себе стремление пуститься вскачь — инстинкт первооткрывателя, отправляющегося на поиски никому не ведомых, безымянных миров (а они все звали и звали меня, заглядывали в глаза, просили назвать по имени…). Эта тяга, которой я мог давать волю не иначе, как изредка и почти украдкой, все эти годы получала лишь скудное удовлетворение.

И все же, по сути я знал, что передаваемая ей доля энергии — ворованная (иначе не скажешь) у моих «задач» интендантского толка — обретала по дороге иную, редкую, изысканную структуру. И не мудрено, ведь ее путь лежал через творчество. В чем его и искать, как не в напряженном внимании, с которым вслушиваешься в голоса вещей, стремясь различить зов того, что просит себе плоти, чтобы появиться и жить... В темноте, среди тайных, бесформенных, влажных складок питающего лона, возможен лишь неясный намек на очертания — и неуклонная, страстная воля родиться на свет. Говоря о труде открытия, как не признать, что в этом напряженном внимании, в этой жаркой заботе и есть его главная сила. Так, проникая под слой питательной почвы, солнечное тепло торопит семена. Навстречу его ласке из земли, как некое чудо, пробиваются едва заметные ростки; созревший бутон раскрывается и видит свет дня.

Оглядываясь на свой жизненный труд как математика, я угадываю в нем действие двух сил, или стремлений — различной природы, равно глубоких. Чтобы их обозначить, я выбрал, во-первых, образ *строителя*, во-вторых — *первопроходца*, или исследователя. Поставив их рядом, я вдруг поразился, до чего оба они «мужественны», «ян», даже «мачо»[66]! У этих слов гордое звучание мифа, в них слышится эхо «великих событий». Несомненно, эти образы были мне навеяны остатками моего прежнего, «героического» представления о творчестве; уж оно-то в свое время было «янь» с ног до головы и выше. В таком виде они создают сильно искаженное, чтобы не сказать застывшее по стойке смирно, впечатление о действительности, которая на деле гораздо проще, скромнее, подвижней, — она живая, попросту говоря.

В мужественном стремлении «строителя», которое, казалось бы, должно без устали толкать нас к новым постройкам, я различаю, однако же, страстишку домоседа, от души привязанного к какому-то *одному* дому. Прежде всего прочего, это *его* дом,

[66]macho (исп.) — мужчина, мужской — *прим. перев.*

то есть нечто *близкое*; это большое живое существо, частью которого он себя ощущает. И лишь во второй черед, по мере того как расширяется круг вещей, воспринимаемых, как близкие, здание оказывается «домом для всех». И в этом стремлении «строить дома», заняться зодчеством (как «занимаются» любовью...), есть еще, и прежде всего, нежность. Это желание *прикоснуться* к тем материалам, которые нужно обрабатывать один за другим — с любовной заботой, которая рождается именно от такого тесного контакта. А когда воздвигнуты стены, уложены балки и крыша на месте, приходит вкус к новой работе. Тогда, шаг за шагом обустраивая дом изнутри, чувствуешь глубокое удовлетворение, глядя, как среди спален, кладовых и гостиных устанавливается особый порядок, ровное согласие гостеприимного дома — красивого, удобного для жизни. Ведь он, *тот самый дом*, — тоже образ матери. Это то, что окружает и защищает нас, то, что нас укрывает от бед и ободряет. И быть может (где-то на более глубоком уровне; пускай мы в эту самую минуту строгаем балки, кладем кирпичи, чтобы на голом пустыре выросло строение), дом этот и есть то, откуда вышли мы сами, то, что в нашей незавершенности защищало и питало нас в те странные, незабываемые времена, до нашего рождения... Это тоже *Лоно*.

И вот образ, только что явившийся сам собою, чтобы, опрокинув тесные рамки громкого символа «первооткрыватель», передать как будто глубоко запрятанную, но обретенную вновь реальность вещей, на глазах теряет всякую «героическую» окраску. И в памяти снова всплывает все тот же архетипический образ материнства — питательной «матки», с ее тайными, неясными трудами живорождения...

Итак, я думал, будто природа этих двух стремлений совершенно различна, а они, глядишь, оказались до того похожи между собой, что я не устаю изумляться. И то и другое по сути — *желание обрести контакт*, и каждое из них влечет нас не далее, чем к новой встрече с *Матерью*. Ведь Она воплощает для нас обе стороны окружающего нас мира: как то, что нам близко, знакомо в нем, так и то, что неизвестно. Отдаться на волю любого из этих стремлений — значит *вернуться к Матери*. То есть заново соприкоснуться с тем, что нам так *близко*, знакомо как будто бы — и в то же время где-то совсем далеко, как темная звезда над горизонтом. Но, неведомое нам, оно все же бывает предпослано странным чувством; переживая его, мы узнаем.

Разница здесь в окраске, в том, как смешаны ингредиенты — совсем не в природе. Когда я «строю дома», преобладает знакомое, когда «исследую» — неизвестное. Эти два «способа» открытия, или, лучше сказать, две стороны одного и того же процесса, нельзя отделить друг от друга. Оба существенны; в работе они друг друга дополняют. Оглядываясь на свой математический труд, я вижу, что равновесие сил в нем подчинялось закону маятника. Первый из двух аспектов, начиная преобладать, словно уже готовился дать место второму[67]. Но при этом совершенно ясно, что во всякую минуту присутствуют оба импульса. Когда я возвожу дома, их обустраиваю, или убираю строительный мусор, тогда я нахожусь на склоне «ян», так что «мужественная» сторона творчества задает тон. Когда же я, пробираясь вперед наощупь, исследую бесформенное, неулови-

[67]То, что я говорю здесь о математической работе, столь же справедливо для труда «медитации» (о котором в том или иной мере говорится на всем протяжении «РС»). Я уверен и в том, что нечто подобное возникает на пути всякого труда открытия, включая работу художника (скажем, поэта или писателя). Два «склона», которые я пытаюсь здесь описать, можно рассматривать и по-другому: первый связан с *выражением* готовых идей и возникающими при этом потребностями технического толка; на второй же переходишь, чтобы *принимать сигнал* (то есть ощущения, впечатления всякого рода). Напряженное внимание, преобразуя такой сигнал, делает его источником *вдохновения*. Оба аспекта присутствуют в каждый момент работы; преобладает, по очереди, то один, то другой.

мое, еще безымянное, тогда я на «инь», женском, склоне моего бытия.

Я совсем не намерен преуменьшать здесь значение того или иного аспекта своей природы, и уж тем более отрицать его. Зачем, ведь каждый из них по-своему важен: «мужской», который строит и порождает, и «женский», который, зачиная, хранит в себе медленное, скрытое от глаз вынашивание плода. Я «есмь» и то, и другое — «ян» и «инь», мужчина и женщина. Но я знаю и то, что самая тонкая, самая изысканная сущность творчества обретается все же на склоне «инь», женском — пускай он скромен, неброск и зачастую неприглядeн на вид.

Думаю, что как раз на этот склон меня всегда и тянуло в работе, притом с особенной силой. Действующие правила, однако, призывали меня вкладывать львиную долю своей энергии в труд с преобладанием другого аспекта — в тот, что воплощается в осязаемых «продуктах» (хочется сказать, законченных и готовых на продажу). И в этих-то продуктах, чьи контуры прочерчены как нельзя более отчетливо; как обтесанный камень, весомых и непреложных в своей реальности, подобный труд, конечно, находит неоспоримое подтверждение…

Сейчас, в перспективе, я ясно вижу, как это всеобщее соглашение давило на меня — и как я был собственной податливостью обречен нести этот груз. Доля «зачатия», или «исследования», в моей работе оставалась более чем скудной вплоть до того, как я ушел со сцены — пусть так. И все же, в эту минуту оглядываясь назад, на то, что все это время представляла собой моя работа как математика, я понимаю ясно, как никогда, что основным ее содержанием и главной силой она обязана именно тому аспекту труда, каким в наши дни принято пренебрегать. А если его замечают, то говорят о нем высокомерно, с насмешкой. Это тот склон, где обретаются *идеи*, даже *грезы* — никак не «результаты». На этих страницах я попытался уяснить себе, что же особенно существенного я сделал в современной мне математике. Мне хотелось охватить взглядом лес, не задерживаясь на отдельных деревьях. Так вот, я увидел не список «великих теорем», а живой веер плодотворных идей[68], которые, сложившись вместе, предстали моему взгляду единым, широким видением.

## 18.

Когда это «предисловие» стало превращаться в «прогулку» вдоль моего труда как математика, с небольшой речью о «наследниках» (прочно вжившихся в роль) и «строителях» (неисправимых), начало вырисовываться также недостающее *название* этому предисловию, и звучало оно как «Ребенок и строитель». С течением дней делалось все яснее, что «ребенок» и «строитель» — один и тот же персонаж. И тогда название стало проще: «Строитель-дитя». Имя, право, не хуже, чем у других, да и я был им доволен!

Но вот, поразмыслив, мы пришли к тому, что этот гордый «строитель», или (скромнее) ребенок-который-играет-в-постройку-домов, — лишь одно из лиц знакомого всем играющего-ребенка, у которого их *два*. Есть еще ребенок-который-любит-изучать-предметы, всюду совать нос, прятаться в песке или в грязной тине, или в прочих

[68]Это не значит, что в моей работе не хватает так называемых «великих теорем». Их довольно, включая те, которые впервые разрешали давно висевшие в воздухе (не мной поставленные) вопросы. (Я сделал обзор некоторых из них в сноске на стр. 554 — в примечании «Море, которое вздымается…» (PC III, $n^\circ$ 122).) Но, как я подчеркнул в начале этой «прогулки» (на этапе «Точки зрения и видение, §6), эти теоремы обретают для меня свой полный смысл лишь в щедром на толкования контексте единой темы, порожденной одной из таких «плодотворных идей». Тогда уже их доказательство легко вытекает из самой природы, из «глубины» несущей их темы. Так волны в реке свободно рождаются от самой водяной глуби и несутся вперед плавно, без усилий. Я говорю о том же самом, используя иные образы, в примечании «Море, которое вздымается…» (см. выше).

безымянных, нелепейших, невозможнейших местах. Без сомнения, желая обмануть (себя, а то кого же), я принялся давать ему новые клички — сверкающее имя «пионера» и, вслед за ним, более приземленное, но еще ярче окруженное ореолом, — «исследователя». Спрашивается, из пары «строитель» и «пионер-исследователь», который мужественней, кто привлекательней? Орел или решка?

И затем, присмотримся немного ближе: вот он, наш отважный «пионер», в конце концов явившийся *девочкой* (а мне-то нравилось наряжать ее мальчишкой) — сестрой темных запруд, грозовых туч, туманных завес ночи, молчаливой и почти невидимой из-за своей привычки держаться в тени; той, о ком от века никто и не вспомнит (разве только затем, чтобы, ломаясь, посмеяться над ней...). Я и сам отлично сумел найти средство день за днем не вспоминать о ней, забыть дважды, позволю себе сказать: я сначала желал видеть только одного мальчика (того, кто играет в постройку домов) — и даже когда просто нельзя было не заметить присутствия *другого*, я опять увидел мальчишку, в ней тоже...

Что касается красивого названия для моей «прогулки», критики оно не выдерживает. Это имя уж очень «ян», с ног до головы «мачо»; выбор хромает. Чтобы ему снова не пойти вкривь, нужно взять под руку *другого* — другую, ведь она тоже здесь. Но вот что странно: эта «другая» *воистину не имеет имени*. Единственное, которое как-то с ней вяжется — «исследователь», но это снова имя для мальчика, ничего не попишешь. Тут сам язык подлец; мы ловимся к нему на крючок, даже не замечая того, а ведь он явно в сговоре со старинными предрассудками.

Можно было бы, наверное, выкрутиться с «ребенком-который-строит» и «ребенком-который-исследует». Бросивши недосказанным то, что один — «мальчик», а другой — «девочка», и то, что это один и тот же ребенок, мальчик-девочка, который, строя, исследует и, исследуя, строит... Но давеча, вдобавок к двойному склону инь-ян того, что созерцает и исследует, и того, что называет и строит, открылась еще одна сторона сути вещей.

Вселенная, Мир, даже Космос — вещи по существу странные и от нас чрезвычайно далекие. На самом деле они нас не затрагивают. Самые глубинные наши мотивы, ответственные за тягу к познанию, не к *ним* влекут нас. Нас манит их *Идея во плоти*, непосредственная и осязаемая, самая близкая, самая «чувственная», богатая ассоциациями, красками и отзвуками, полная тайны — Та, что сливается с истоками нашего плотского бытия, как родная по крови, и Та, что во все времена внимает нам, готовая нас принять «на другом конце пути». И это к *Ней*, к Матери, родившей нас, как она родила Мир, пробивается родник души, импульс, влекущий нас за собой, к Ней стремятся пути желания, ведя нас обрести Ее вновь, вперед и по кругу неустанно, чтобы, погрузившись, вернуться к Ней...

Итак, непредвиденный поворот дороги во время «прогулки» дал мне возможность вдруг воскресить в памяти как будто знакомую, но слегка позабытую притчу о «*Матери и ребенке*». Можно назвать ее иначе, «*Жизнь, как путешествие к ее сути*». Или, на более скромном уровне правды одного человека, это притча «*Бытие, или поиск*».

Это притча, и это выражение опыта предков, чьи корни в душе крепки — мощнейшего среди первородных символов, питающих глубокие творческие пласты. Я думаю, что узнал в ней, пересказанной древним языком архетипов, само дыхание творческой силы в человеке, живительное для его плоти и духа, слышное в его проявлениях самых мимолетных и незаметных, различимое в самых ярких и долговечных.

Это дыхание, как и родственный ему образ во плоти, родом из самого скромного мира. Но кто заметит его — а если это вдруг случится, кто тогда не пожмет плечами, в спешке отводя глаза от какой-то беззащитной, немыслимо хрупкой его оболочки… И пока ты живешь, история превратностей, выпавших на долю этого дыхания-вдохновения — это *твое* приключение, «приключение познания». Притча о ребенке и матери вечно без слов о нем говорит.

Ты сам ребенок, происшедший от Матери, защищенный Ею, вскормленный ее могуществом. И ребенок тянется к Матери, Совсем-родной, Близко-знакомой — к встрече с Ней, не знающей предела, всегда неизвестной и полной тайны…

Конец «Прогулки по творческому пути».

## **Эпилог:** *Невидимые Круги.*

## 19.

До появления точки зрения топосов, к концу пятидесятых годов, эволюция понятия пространства мне представляется по существу *непрерывной.* Она проистекала как бы гладко, без скачков и резких поворотов, начиная с евклидовых теоретических разработок на предмет окружающего нас пространства и с геометрии, что досталась от греков, увлекавшихся изучением некоторых «фигур» (прямых, плоскостей, кругов, треугольников и пр.), обитающих в этом пространстве. Конечно, способ восприятия «пространства» математиками (или «естественными философами») претерпевал глубокие изменения[69]. Но и эти изменения, на мой взгляд, умещались целиком в природе самой

[69]Сначала, приступая к Эпилогу, я собирался включить в него сжатый обзор некоторых из этих «глубоких изменений» и вкратце осветить эту «непрерывность по существу», как она мне виделась. Все же я передумал, дабы «Прогулка» не затянулась чрезмерно — и так уж она куда длиннее, чем я ожидал. Предполагаю вернуться к этому вопросу в Исторических Комментариях, намеченных для четвертого тома «РС», обращаясь на этот раз к читателю-математику (что должно полностью изменить задачи изложения).

«непрерывности» — никогда они не ставили математика, связанного (в точности, как любой из нас) системой привычных мысленных образов, перед чем-либо чужеродным, неуютным, приводящим во внезапное *замешательство*. Так меняется для нас, значительно, но постепенно, некто, кого мы знали еще ребенком, и чья эволюция с годами происходила на наших глазах, с первых его шагов до отрочества и полной зрелости. Меняется неуловимо в какие-то, иногда долгие, периоды затишья — и, бывает, бурно, явственно, в короткий срок. Но даже в периоды роста или самого напряженного взросления, пускай мы потеряли его из виду на месяцы, а то и на годы, мы ни на секунду не поколеблемся, не усомнимся: это все он же, он самый, существо прекрасно знакомое и привычное, и уж его-то мы узнаем, как время ни шути.

Полагаю, можно сказать, впрочем, что к середине нашего столетия это привычное создание уже изрядно состарилось — эдакий человече, который вконец износился, истощив былые силы, так что наплыв новых задач, к каким он совершенно не был подготовлен, оказался ему не по силам. Да он мог уже преспокойно отдать богу душу; никто не позаботился бы обратить на это внимание или, скажем, составить бумагу. «Все на свете» усердно старались бы представить дело так, будто он еще жив, по-прежнему хлопоча вовсю в его доме; глядишь, тут и вышло бы, что покойник словно и впрямь почти не мертвец.

Вообразите же себе, однако, досаду завсегдатаев этого дома, когда на месте почтенного старца, прямого, как палка, застывшего в своем кресле, они, приходя, застают резвящимся здоровехонького мальчишку, от горшка два вершка. А он им мимоходом, совершенно серьезно и как будто это само собой разумеется, заявляет, что «Его милость Пространство» (и можете впредь обходиться без «Вашей милости», к чему церемонии) — это он и есть! И пускай был бы хоть намек на фамильное сходство — побочный сынок, там уж кто знает… так ведь нет!

Как будто ничего, отдаленно напоминающего старого Папашу Пространство, так хорошо им знакомого (или это им так казалось…), и на чей счет уж во всяком случае (и помыслить-то невозможно, чтоб вышло иначе) была уверенность, что он будет всегда.

Вот *оно*, пресловутое «перерождение понятия пространства». Это *его* я «видел», как нечто несомненное, ни разу не попытавшись описать для себя картину словами — вплоть до самой минуты, когда пишутся эти строки. И я вдруг осознал с новой ясностью (сработала последняя метафора и тут же навеянная ею целая туча ассоциаций): традиционное понятие «пространства», и родственное ему понятие «многообразия» (любого, и в особенности «алгебраического»), к тому моменту, когда я зашел в их края, стали совсем дряхлыми и немощными — все равно, как если бы они и впрямь уже отдали Богу душу[70]. И можно сказать, что когда появились одна за другой точка зрения *схем* (и ее потомство[71], и в довершение ко всему десять тысяч страниц

[70]Это утверждение (некоторым оно представляется чересчур категоричным) вполне выверено здравым смыслом. Оно ни более, ни менее соответствует действительности, чем утверждение (к нему я еще вернусь ниже) о том, что «ньютоновская модель» механики (земной или небесной) была «при смерти» в начале этого века, когда Эйнштейн явился ей на выручку. Несомненно, что еще и теперь для большей части «повседневных» ситуаций в физике модель Ньютона совершенно адекватна, и было бы нелепо (ввиду допустимой степени точности измерений) отправляться на поиски релятивистской модели. Точно так же, во многих ситуациях в математике привычные старинные понятия «пространства» и «многообразия» остаются абсолютно адекватными, так что нет нужды в погоне за нильпотентными элементами, топосами или «ручными структурами». Но и в том и в другом случае для растущего числа контекстов, участвующих в современных исследованиях, самые «обычные» ситуации не умещаются в рамках старинного восприятия.

[71](Предназначено для математика.) К этому «потомству» я отношу, в частности, формальные схемы, стэки (орбиобразия, «пространства» модулей — устоявшегося русского термина нет — *прим. перев.*) всех видов (осо-

оснований), а затем точка зрения *топосов*, кризис-скрывавший-свое-имя оказался наконец разрешенным.

Что касается нашей недавней аллегории с мальчишкой на месте Папаши-Пространства, здесь нужно говорить не об одном дитяти, возникшем в результате внезапной мутации, но о *двоих*. Двое ребятишек, имеющих между собой несомненное «фамильное сходство», даже если в них нет ничего общего с усопшим старцем. И еще можно сказать, присмотревшись, что крошка Схема — как бы «переходное звено» родственной цепочки, связывающей покойного Батюшку Пространство (он же Многообразие, любого вида) с малышкой Топосом[72].

## 20.

Ситуация представляется мне весьма сходной с той, что сложилась в начале нашего века, с появлением теории относительности Эйнштейна. То был концептуальный тупик, еще более явный, воплотившийся в неожиданном *противоречии*, которое казалось неразрешимым. Как ей и положено, новая идея, которая восстановила порядок в наступившем было хаосе, оказалась простой по-младенчески. Примечательно, что (точь-в-точь по сценарию, который разыгрывается вновь и вновь…) среди всех этих блестящих, выдающихся, авторитетных ученых, которые разом бросились вдруг «спасать все, что еще не поздно», ни

бенно схемные, или формальные), наконец, так называемые «жесткие аналитические» пространства (их ввел Тэйт, следуя плану работ, который я составил, основываясь на новом понятии топоса, и в то же время на понятии формальной схемы). Это, впрочем, далеко не полный список…

[72]Случилось так, впрочем, что к этим двоим младенцам прибавился третий, еще младше, который появился на свет в менее мягкие времена — малютка *ручное Пространство*. Как я уже отмечал выше, у него нет свидетельства о рождении, и я совершенно незаконно включил его, несмотря на это, в число двенадцати «главных тем», которые я имел честь привнести в математику.

один не додумался до этой идеи. Должно было случиться, чтобы безвестный молодой человек, едва закончивший (если довелось) учиться в университете, явился (слегка смущенный, быть может, собственной дерзостью...) и объяснил прославленным старейшинам от науки, что нужно сделать, чтобы «спасти положение»: это перестать разделять пространство и время[73]! Технически, все тогда сложилось удачно для того, чтобы эта идея появилась и была воспринята. И, к чести старших коллег Эйнштейна, они в самом деле сумели воспринять новую идею, не слишком ворча и досадуя. Вот знак, что то была все же великая эпоха...

С математической точки зрения новая идея Эйнштейна была банальна. Для нашего восприятия *физического пространства*, напротив, это была глубокая перемена, внезапно смешавшая карты. Первая мутация своего рода, считая от математической модели физического пространства, предложенной Евклидом 2400 лет назад, которую все физики и астрономы (включая Ньютона) подправляли время от времени для нужд механики, как земной, так и небесной.

Исходная идея Эйнштейна впоследствии сделалась глубже, получив воплощение в более тонкой, богатой и гибкой математической модели, при поддержке богатейшего арсенала уже существующих математических понятий[74]. С появлением «общей

[73]Это, конечно, не слишком подробное описание идеи Эйнштейна. В техническом отношении, следует указать, какой структурой снабжено новое пространство-время (она, впрочем, уже «носилась в воздухе» после теории Максвелла и идей Лоренца). Существенный шаг вперед был не технической природы, но *философской*: принять в расчет, что понятие одновременности для событий, отдаленных в пространстве, не имеет никакой экспериментальной основы. Это заявление «устами младенца», это возглас: «А король-то голый!» — тот, с каким преодолевают известные нам «круги невидимые, но властные, которые ограничивают Вселенную»...

[74]Речь идет прежде всего о понятии «риманова многообразия» и тензорного исчисления над этим многообразием.

теории относительности» эта идея превратилась в широкое *видение* физического мира, охватившее одним взглядом субатомный мир бесконечно малого, Солнечную систему, Млечный Путь и удаленные галактики, и распространение электромагнитных волн в пространстве-времени, искривленном в каждой точке материей, там расположенной[75]. Тогда, во второй и последний раз в истории космологии и физики (вслед за первым великим синтезом, проведенным Ньютоном три века тому) появилось широкое объединяющее видение совокупности физических явлений во Вселенной, изложенное языком математической модели.

Впрочем, это эйнштейновское видение физической Вселенной, в свою очередь, пошатнулось под наплывом событий. «У совокупности физических явлений», которые нужно было принять в расчет, было довольно времени с начала этого столетия, чтобы расширить свой список! Появилось множество физических теорий, каждая из которых более или менее успешно объясняла ограниченный набор фактов из невероятного нагромождения «наблюдаемых явлений». И все ждали дерзкого мальчишку, который нашел бы, играя, новый ключ (если он один…), горячо предвкушаемую модель, которая «сработала» бы и объяснила бы все разом[76]…

---

[75]Одна из самых поразительных черт, отличающих эту модель от евклидовой (или ньютоновской), а также от первой модели Эйнштейна (из «специальной теории относительности») состоит в том, что *глобальная топологическая форма* пространства-времени остается неопределенной, вместо того чтобы быть предписанной автоматически самой природой модели. Вопрос определения этой глобальной формы кажется мне (как математику) одним из самых увлекательных в космологии.

[76]Гипотетическую теорию, которая объединила и согласовала бы между собой все частичные теории, о которых идет речь, назвали «теорией великого объединения». У меня есть ощущение, что то, над чем здесь стоит основательно поразмыслить, распадается на нижеследующие два раздела.

1). Требуется размышление «философской» природы над самим понятием «математической модели» и тем, как оно соотносится с действительностью.

Начиная с успеха ньютоновской теории, среди физиков стало аксиомой по умолчанию, что *существует* математическая модель (даже *единственно правильная* модель) для абсолютно адекватного, без сучка и задоринки, выражения физической реальности. Это соглашение, более двух столетий задававшее у нас тон, представляет собою нечто вроде окаменелых останков некогда живого видения Пифагора: «Все есть число». Может статься, это новый «невидимый круг», пришедший на смену древним метафизическим кругам, чтобы ограничить Вселенную физика (в то время как раса «естественных философов» определенно представляется вымершей: их с легкостью вытеснили компьютеры…). Стоит лишь мгновение над этим поразмыслить, как становится ясно, что законность этого соглашения далеко не бесспорна. Есть даже весьма серьезные философские причины тому, чтобы априори ставить ее под сомнение, или, по крайней мере, предусматривать строжайшие границы применимости соглашения. Поняв это, остается — теперь, или никогда — подвергнуть эту аксиому тщательной критике, даже может быть, «доказать», вне всякого сомнения, что она *не* имеет под собой основания: что *не* существует неопровержимой математической модели, которая объясняла бы совокупность так называемых физических явлений, составляющих сегодняшний список.

Если определить удовлетворительным образом само понятие «математической модели» и «законности» ее (в пределах ошибки, допустимых для данных измерений), вопрос «теории великого объединения», или по крайней мере «оптимальной модели» (в смысле, подлежащем уточнению) окажется, наконец, ясно поставленным. В то же время мы, бесспорно, получим более точное представление о степени произвола, сопровождающего (с необходимостью, быть может) выбор таковой модели.

2). Лишь *после* такого размышления, мне кажется, «техническая» проблема отыскать точную модель, более удовлетворительную, чем те, что ей предшествовали, приобретает свой полный смысл. И одновременно, быть может, наступает пора извлечь на свет вторую аксиому, по умолчанию принятую среди физиков со времен античности, глубоко укоренившуюся в самом способе нашего восприятия пространства: аксиому, утверждающую *непрерывность* природы пространства и времени (или пространства-времени), «места», где происходят события, которые изучает физика.

Тому должно быть уже лет пятнадцать-двадцать, как, листая скромный томик, заключающий в себе полное собрание трудов Римана, я был поражен замечанием, брошенным им мимоходом. Согласно ему вполне могло бы случиться, что структура пространства в конце концов дискретна, и что «непрерывные» ее модели, нами изготовляемые, представляют собой упро-

Сравнение между моим вкладом в современную мне математику и вкладом Эйнштейна в физику мне приходит на ум по двум причинам: во-первых, и тот и другой труд состоялся за счет *перерождения нашего представления о пространстве* (в одном случае — в математическом смысле, и в физическом — во втором); во-вторых, оба они приняли форму *объединяющего видения*, охватившего обширное множество явлений и ситуаций, которые раньше воспринимались совершенно отдельно друг от друга. Мне видится явственно *родство по духу* между

щение (возможно, чрезмерное...) более сложной действительности. Для человеческого разума «непрерывное» уловить легче, чем «разрывное», так что первое служит нам приближением, помогающим понять второе. Это замечание, устами математика, необычайно и неожиданно по своей проницательности, ведь на тот момент евклидова модель физического пространства ни разу еще не ставилась под сомнение. В строго логическом смысле, это скорее разрывное традиционно служило техническим приемом подхода к непрерывному.

Достижения математики последних десятилетий, впрочем, привели к возникновению куда более близкого симбиоза между непрерывными и разрывными структурами, чем это можно было себе вообразить еще в первой половине нашего века. Всегда выходило так, что при поисках «удовлетворительной» модели (или, в случае необходимости, совокупности таких моделей, «подходящих» друг к другу в такой степени, в какой только возможно...), будь она «непрерывной», «дискретной» или «смешанной» природы, неизменно вступало в игру богатое концептуальное воображение и настоящее чутье, чтобы изучить и вывести на свет математические структуры нового типа. Воображение или «чутье» такого рода, мне кажется, редкая штука, не только среди физиков (Эйнштейн и Шредингер были, по-видимому, в числе немногих исключений), но даже среди математиков (тут уже я говорю с полным знанием дела).

Резюмируя, я предвижу, что ожидаемое обновление (если оно состоится...) будет проведено скорее математиком по духу, хорошо осведомленным в области серьезных физических проблем, нежели физиком. Но в первую очередь это должен быть человек с «широким философским кругозором», чтобы уловить суть проблемы. Она ведь отнюдь не имеет технической природы, но относится к основополагающим вопросам «естественной философии».

его трудом[77] и моим.

Это родство, на мой взгляд, ничуть не противоречит очевидному различию *в существе* задач той или иной работы. Как мы уже недавно увидели, перемены, введенные Эйнштейном, касаются понятия физического пространства, так что он черпал из арсенала уже известных математических понятий, ни разу не испытав нужды в том, чтобы его расширить или хотя бы переворошить в поисках чего-либо особенно глубоко запрятанного. Его вклад заключался в том, что он нашел среди математических структур, известных к тому времени, те, что были наиболее приспособлены служить как «модели» для мира физических явлений. Его модель пришла на смену предыдущей, бывшей уже при смерти[78], когда-то завещанной его предшественниками. В этом смысле его труд был вот именно трудом *физика* и, сверх того, трудом *естественного философа*, как понимали задачи последнего Ньютон и его современники. Это «философское» измерение отсутствует в моем математическом труде. Мне никогда не приходило в голову задаться вопросом о возможных связях между воображаемыми, «идеальными» концептуальными конструкциями, осуществимыми во Вселенной математических объектов, и явлениями физического мира (и даже событиями из мира духовного). Мой труд был трудом *математика*, намеренно обходящего стороной вопрос «приложений» (в других науках) или «мотивации» и внутренних, душевных корней того, что побуждало меня к работе. Математика, к тому же, влекомого духом, прежде всего прочего, к неустанному расширению арсенала основных для своего искусства понятий. Так-то мне

---

[77]Я нимало не претендую на близкое знакомство с трудом Эйнштейна. На деле я не прочел ни одной из его работ и не узнал ни одной из его идей иначе, как со слуха, притом весьма приблизительно. Мне, однако, кажется, что я вижу лес за этими незнакомыми мне деревьями…

[78]Для пояснения, что значит «при смерти» в применении к математической модели, см. сноску $n^\circ$ 70.

и привелось, совершенно не осознавая того и как бы играючи, поставить с ног на голову самое что ни на есть основополагающее понятие геометрии: понятие *пространства* (и «многообразия»), то есть наше представление о самом *месте*, где живут геометрические существа. Новое понятие «пространства» (что-то вроде «обобщенного пространства», но только точки, которые должны как будто бы его образовывать, более или менее из него исчезли), ничем не напоминает, по сути, понятие, которое Эйнштейн внес в физику (отнюдь не обескураживающее для математика). Здесь, напротив, напрашивается сравнение с *квантовой механикой*, открытой Шредингером[79]. В этой новой механике традиционная «материальная точка» исчезает, уступив место чему-то вроде «вероятностного облака», более или менее плотного в той или иной области пространства, в зависимости от «вероятности», с которой точка находится в этой области. В этом новом подходе явственно ощущается «мутация» нашего способа восприятия явлений в механике, еще более глубокая, чем та, что приведена в действие моделью Эйнштейна — мутация, которая не ограничивается простой заменой математической модели, немного узкой в плечах, другой похожей, но большего размера или лучше скроенной. На этот раз новая модель так мало напоминает старые добрые традиционные модели, что даже математик, будь он при этом большим специалистом в области механики, перед ней вдруг чувствует себя в недоумении, даже в растерянности (или в бешенстве...). Переход от механики Ньютона к эйнштейновской должен ощущаться математиком примерно так же, как переход от давнего, трогательного провинциального диалекта к парижскому жаргону

[79]Как я это себе представляю (на основе отзвуков, долетавших до меня с разных сторон), в общем принято насчитывать в этом столетии три «революции», или великих переворота, в физике: теория Эйнштейна, открытие радиоактивности супругами Кюри, и введение квантовой механики Шредингером.

последней моды. Напротив, перейти к квантовой механике — все равно что заменить французский китайским.

И эти «вероятностные облака», пришедшие на смену таким надежным материальным частицам прежнего, странным образом напоминают мне ускользающие «открытые окрестности», которые населяют топосы, эдакие неуловимые призраки, окружающие несуществующие «точки», за которые, всему уже наперекор, продолжает цепляться непослушное воображение…

## 21.

Этот короткий визит к «соседям напротив», физикам, мог бы помочь сориентироваться читателю, который (как большинство людей) совсем не знает, что делается в мире математиков, но заведомо наслышан об Эйнштейне с его прославленным «четвертым измерением» и даже о квантовой механике. В конечном счете, даже если изобретатели не могли предвидеть, что их открытия приведут к Хиросиме, и позже к безумному наращиванию атомной техники, военной и (так называемой) «мирной», несомненно, что открытия в физике оказывают ощутимое и почти немедленное воздействие на человеческое общество в целом. Воздействие же математического открытия, и прежде всего в математике, которую называют «чистой» (то есть, не имеющей в виду конкретного «приложения»), менее непосредственное, и, конечно, его труднее выявить. Например, я не имею представления о том, могли ли мои результаты в математике «послужить» чему бы то ни было, скажем, созданию малейшего устройства или механизма. В этом, разумеется, нет особой заслуги, но все же мне так спокойнее. Как только появляются приложения, можно не сомневаться, что военные (и, по их следам, полиция) будут первыми, кто приберет их к рукам; что бы это ни дало промышленности (даже той, которую называют «мирной»), это далеко не всегда к лучшему…

Конечно, для моей же собственной пользы и для удобства читателя-математика было бы разумней соотнести мой труд с маяками в истории самой математики, чем отправляться искать аналогий на стороне. Я обдумал это в последние несколько дней, в рамках моего довольно туманного представления об истории науки[80]. Во время «Прогулки» мне уже как-то случилось вызвать в памяти «линию» математиков, сходных по роду темперамента, к какому и я себя отношу. Вот она: Галуа, Риман, Гильберт. Будь я более осведомлен в истории моего искусства, я бы, возможно, сумел продолжить эту линию глубже в прошлое, или, скажем, включить в нее еще несколько имен, теперь мне известных лишь понаслышке. Поразительно то, что я не могу припомнить ни из каких источников, даже из разговоров друзей или коллег, лучше меня разбиравшихся в истории, сведений о каком-нибудь математике, кроме меня, который привнес бы в науку множество новых идей, не разрозненных, но собравшихся в единое видение (как это вышло с Ньютоном и Эйнштейном в физике и космологии, а в биологии — с Пастером и Дарвином). Я могу указать лишь два «момента» в истории математики, связанные с появлением нового видения широкого размаха. Один из них — само рождение математики, как науки в сегодняшнем понимании этого слова: 2500 лет назад, в Древней Греции. Другой — возникновение анализа бесконечно малых и интегрирования, в семнадцатом столетии; эпоха, отмеченная именами Ньютона, Лейбница, Декарта и других. Насколько мне известно,

[80]Еще в детстве, история (да и география, впрочем) меня никогда особенно не увлекала. (В пятой части «РС» (незавершенной) мне выдался случай «мимоходом» обнаружить то, что мне кажется глубокой причиной наличия у меня этого частичного «барьера» по отношению к истории — барьера, который начал, по моему, рассасываться в последние годы.) К тому же, математическое образование, полученное от старших, в «бурбакистском кругу», не навело в моей голове порядка: случайные ссылки на историю были в нем более чем редки.

в обоих случаях новое видение явилось продуктом не индивидуального, но коллективного труда математиков, составлявших эпоху.

Конечно, от Пифагора и Евклида до начала семнадцатого столетия у математики было довольно времени, чтобы сменить облик — да и потом, между «Исчислением бесконечно малых», изобретенным математиками в семнадцатом веке, и серединой теперешнего двадцатого утекло немало воды. Но, насколько я знаю, глубокие изменения, происшедшие в течение этих двух периодов (один сроком более чем в две тысячи лет, другой — в три столетия), ни разу не приняли формы нового видения, представленного чьим-нибудь конкретным трудом[81], как это было

[81]Через несколько часов после написания этих строчек я был вдруг потрясен тем, что мне и в голову не пришло упомянуть здесь о широком синтезе разделов современной математики, который старался устроить союз (коллектив) Н. Бурбаки. (О группе Бурбаки будет сказано немало в первой части «РС».) Так вышло, мне кажется, по двум причинам.

С одной стороны, этот синтез ограничивался чем-то вроде «приведения в порядок» широкой совокупности идей и результатов, уже известных, без того, чтобы добавить к ним свои новаторские идеи. Если там была новая идея, то она заключалась в строгом математическом определении понятия «структуры», явившейся бесценною путеводною нитью для всей деятельности союза. Но эта идея, мне кажется, подобна скорее идее толкового и не без воображения лексикографа, чем одной из основ обновления языка, дающей свежее представление о реальности (в данном случае, математической).

С другой стороны, считая с пятидесятых годов, идея структуры оказалась в хвосте событий, с неожиданным наплывом «категорных» методов в некоторые из наиболее динамичных разделов математики, именно топологию и алгебраическую геометрию. (Так, понятие «топоса» отказалось влезть в «мешок Бурбаки», не то он бы расползся по швам!) Решив для себя, со всей ответственностью, разумеется, не ввязываться в это дело, Бурбаки тем самым отреклись от своего исходного намерения, состоявшего в том, чтобы обеспечить *единые* основы и *единый* язык для современной математики в целом.

Они, напротив, закрепили на месте язык, и в то же время определенв физике и космологии, с великим синтезом, осуществленным Ньютоном, а затем Эйнштейном — два важнейших, узловых события в истории этих наук.

Похоже, что постольку, поскольку служитель нового широкого, объединяющего видения родился во мне, я оказался «единственным в своем роде» в истории математики, считая от ее начала до наших дней. Печально иметь вид человека, желающего так непозволительно выделяться на общем фоне! Все же я, кажется, разглядел издалека, к своему облегчению, возможного (и спасительного!) как будто бы *брата*. Мне недавно уже случилось его упомянуть, первым в ряду моих «братьев по темпераменту»; это *Эварист Галуа*. В его короткой и ослепительной жизни[82] я, как мне представляется, различаю признаки зарождения большого видения, воистину «союза числа и величины» в новом геометрическом контексте. Я упоминал уже на страницах «РС»[83], как, два года назад, у меня внезапно возникло это ощущение, что в математической работе, в тот момент почти безраздельно господствовавшей в моем воображении, я занят не чем иным, как «возрождением наследия Галуа». Это ощущение, с тех пор редко возобновлявшееся, все же молча зрело во мне, не упуская времени. В последние три недели, когда я обдумывал завершенный труд, оно заведомо усилилось. Нить пре-

---

ный *стиль* изложения и подхода к математике. Этот стиль появился, как отражение (весьма неполное) некоего *духа*, когда-то живого и впрямую унаследованного от Гильберта. В течение пятидесятых и шестидесятых годов этот стиль, к лучшему то или к худшему (вот это скорее), сделался в конце концов обязательным. За двадцать лет он стал жестким *каноном* чисто наружной, парадной «строгости»; дух же, его некогда оживлявший, словно бы исчез безвозвратно.

[82]Эварист Галуа (1811–1832) был убит на дуэли, в возрасте двадцати одного года. Существует, я думаю, несколько его биографий. Я в юности читал о нем роман-биографию, написанный физиком Инфельдом и немало меня тогда поразивший.

[83]См. «Наследие Галуа» (РС I, §7).

емственности самой непосредственной, ведущая к математикам прошлого (мне кажется, сейчас я научился ее видеть), связывает меня именно с Эваристом Галуа. Справедливо или нет, но мне кажется, что видение, которое я развил в течение пятнадцати лет своей жизни, и которое все еще зреет и набирает краски во мне вот уже шестнадцать лет, истекших со дня моего ухода — что это самое видение не мог бы не открыть Галуа[84], забредя в те же, что и я, математические владения, если бы преждевременная смерть грубо не оборвала его великолепный разбег.

Есть, конечно, еще и другая вещь, которая прибавляет силы этому ощущению «родства по существу» — родства, которое не сводится ни к одному лишь «математическому темпераменту», ни к какой-либо иной из сторон нашей работы. В нашей жизни, его и моей, я чувствую общность судеб. Конечно, Галуа нелепо погиб двадцати одного года от роду, в то время как мне уже под шестьдесят, и я определенно готов тянуть и дальше. При всем том, однако, Эварист Галуа при жизни оставался, точь-в-точь как я полтора века спустя, *второстепенной* фигурой в официальном математическом мире. Что до Галуа, тут поверхностному наблюдателю может показаться, что эта второстепенность «случайна», что у него просто не было времени своими трудами и новаторскими идеями заставить себя признать. В моем случае, моя второстепенность в течение первых трех лет моей жизни как математика объясняется моим неведением (быть может, нарочитым...) о самом существовании мира математиков, с которым я потом столкнулся. И с тех пор, как я ушел с математической сцены, вот уже шестнадцать лет тому, она —

[84] Я, впрочем, убежден, что Галуа пошел бы намного дальше меня. С одной стороны, из-за его исключительной одаренности (что до меня, моя доля куда меньше в этом отношении). С другой — потому, что он, возможно, не допустил бы, в отличие от меня, чтобы большая часть его энергии ушла на эти нескончаемые усилия: постепенно, вплоть до малейших деталей, приводить в должный вид то, что и так уже уже более или менее известно...

последствие сознательного выбора. Того самого, который, без сомнения, и повлек за собой наказание: «согласной волею и в едином порыве» стереть всякие следы моего имени в математике, и с ними то видение, чьим служителем я себя сделал.

Но за случайными расхождениями я все же различаю общую причину этой «второстепенности», на мой взгляд, существенную. Я вижу ее не в исторических обстоятельствах, и не в особенностях «темперамента», или «характера» (эти свойства, конечно, свои у каждого из нас, ведь мы разные люди), и уж тем более не на уровне одаренности (почти сверхъестественной в случае Галуа, сравнительно скромной — в моем). Если и есть оно, это родство, я вижу его на более приземленном уровне — совсем элементарном.

Я испытывал подобное, редкое, чувство родства несколько раз в своей жизни. Именно оно «сближает» меня еще с одним математиком, бывшим моим старшим коллегой: *Клодом Шевалле*[85]. Связь, о которой я хотел сказать, это что-то вроде «наивности», или «невинности», о которой здесь уже заходила речь. Она выражается в естественной склонности (часто не особенно ценимой окружающими) смотреть на вещи своими собственными глазами, а не сквозь патентованные очки, любезно предложенные какой-нибудь, широкой или не очень, группой людей, по той или иной причине управляющих мнениями.

Эта «склонность», или внутренняя позиция, не есть привилегия зрелости — она принадлежит младенчеству. Это дар, получаемый при рождении, одновременно с жизнью; он смиренный и грозный. Дар, часто глубоко зарытый; некоторые умеют его как-то сохранять, или, может быть, обретать вновь…

Можно также называть его *даром одиночества*.

[85] Я понемногу, то здесь, то там, говорю о Клоде Шевалле на страницах «РС», в особенности в разделе «Встреча с Клодом Шевалле, или случай дать волю чувствам» (РС I, §11), и в примечании «Прощание с Клодом Шевалле» (РС III, примечание $n^\circ$ 100).