Оглавление

Программа курса

1. Формальные степенные ряды и производящие функции.
2. Действия над формальными степенными рядами: сложение, умножение, деление, подстановка формального степенного ряда в формальный степенной ряд.
3. Производящие функции для элементарных последовательностей (числа Фибоначчи, Каталана,...).
4. Рекуррентные соотношения и производящие функции.
5. Дифференцирование и интегрирование формальных рядов.
6. Число разбиений числа n; теорема Эйлера и диаграммы Юнга.
7. Формулы включения-исключения.
8. Формальные грамматики с однозначным выводом; производящая функция для числа слов в языке, порожденном формальной грамматикой с однозначным выводом.
9. Теорема Лагранжа.
10. Аналитические свойства функций, представляемых степенными рядами, и асимптотика коэффициентов.
11. Производящие функции двух переменных.
12. Деревья; производящая функция для числа деревьев.
13. Плоские деревья и производящая функция для них.
14. Плоские графы; теорема Куратовского; теорема Эйлера.
15. Хроматические многочлены.
16. Графы на поверхностях (эскизы); эйлерова характеристика.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Полиа, Г.Сеге Задачи и теоремы из анализа, тт. 1, 2.

2. Р.Стэнли Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990.

3. Я.Гульден, Д.Джексон Перечислительная комбинаторика, М., Наука, 1990.

4. Дж. Риордан Введение в комбинаторный анализ.

5. В.Н.Сачков Введение в комбинаторные методы дискретной математики, Москва, "Наука", 1982.

ЛЕКЦИЯ 1.

Формальные степенные ряды и производящие функции
Действия над формальными степенными рядами
Элементарные производящие функции

1.1. Задача о числе счастливых билетов.

Начнем с задачи, которой А.А.Кириллов открывал свой семинар лет двадцать назад.

В те времена человек, едущий в общественном транспорте, должен был купить в автоматической кассе билет. У каждого билета был номер. Номер состоял из шести цифр. Билет называется счастливым, *если сумма первых трех цифр его номера равняется сумме его последних трех цифр. Билеты 000 000, 123 060 — счастливые, а билет 123 456 — не счастливый. Счастливый билет полагалось на счастье съесть.*

Сколько всего существует счастливых билетов?

Человеку, владеющему элементарными навыками программирования, не представляет никаких трудностей написать программу для подсчета числа счастливых билетов. Программа состоит в переборе всех счастливых билетов и отборе среди них счастливых. Давайте, однако, приглядимся к задаче повнимательней.

Ясно, что все счастливые билеты разбиваются на классы, в каждом из которых сумма первых трех цифр одна и та же. Сумма первых трех цифр может принимать значения от 0 (для тройки цифр 000) до 27 (для тройки цифр 999). Поэтому число таких классов равно 28. Обозначим через a_n число троек цифр с суммой n. Например, $a_0 = 1$, так как есть всего одна тройка цифр с суммой 0. $a_1 = 3$, так как есть три тройки цифр с суммой 1: 001, 010, 100.

Упражнение 1.1. *Вычислите a_n для $n = 2, 3, 4$.*

Очевидно, что число счастливых билетов, сумма первых трех цифр в которых равна n, есть a_n^2. Действительно, любую тройку цифр с суммой n мы можем поставить как на первое, так и на второе место в номере билета.

Таким образом, для подсчета числа счастливых билетов нам достаточно вычислить значения чисел a_n, а затем сосчитать сумму квадратов

Упражнение 1.2. *Докажите, что $a_n = a_{27-n}$. Упростите предыдущую формулу с помощью этого равенства.*

Для вычисления значений a_n попробуем сначала подсчитать число одно- и двухзначных чисел, сумма цифр которых равна n. Ясно, что для каждого n = 0, 1, 2, ..., 9 существует ровно одно однозначное число, сумма цифр которого равна n. Будем описывать однозначные числа многочленом $A_1(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots + s^9$. Смысл у этого многочлена следующий:

> *коэффициент при s^n многочлена A_1 равен числу однозначных чисел, сумма цифр которых равна n (то есть равен единице).*

Выпишем теперь многочлен $A_2(s)$, описывающий двузначные числа. Коэффициент при s^n многочлена $A_2(s)$ равен числу двузначных чисел с суммой цифр n.

Упражнение 1.3. *Найдите степень многочлена A_2.*

Предложение. $A_2(s) = (A_1(s))^2$.

Доказательство. Произведение мономов s^k и s^m дает вклад в коэффициент при s^n многочлена A_2 в том и только в том случае, если $k+m = n$. Поэтому коэффициент при мономе s^n многочлена A_2 в точности равен числу представлений числа n в виде суммы цифр k, m = 0, 1, ..., 9.

Упражнение 1.4. *Выпишите явно многочлен $A_2(s)$.*

Упражнение 1.5. *Докажите, что многочлен $A_3(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{27} s^{27}$ представим в виде*

$$A_3(s) = (A_1(s))^3.$$

Упражнение 1.6. *Выпишите явно многочлен A_3 и подсчитайте число счастливых билетов.*

Упражнение 1.7. *Выпишите формулу для числа счастливых билетов из 2r цифр в системе счисления с основанием q.*

Выполнение предыдущего упражнения решает поставленную в начале лекции задачу. Вычисления можно провести вручную, затратив на это порядка десяти минут. Надобность в написании программы отпадает. Однако, можно не останавливаться на достигнутом и пойти дальше.

Рассмотрим наряду с многочленом $A_3(s)$ «многочлен Лорана» $A_3(1/s)$ от переменной $(1/s)$:

$$A_3(1/s) = a_0 + a_1\frac{1}{s} + a_2\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \cdots + a_{27}\left(\frac{1}{s}\right)^{27}.$$

Взяв произведение $A_3(s) \cdot A_3(1/s)$ мы видим, что свободный член в нем равен $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{27}^2$, и мы заключаем, что

> *число счастливых билетов равно свободному члену многочлена Лорана $A_3(s)A_3(1/s)$.*

Преобразуем последнее выражение:

$$A_3(s)A_3(1/s) = \left(\frac{1-s^{10}}{1-s}\right)^3\left(\frac{1-s^{-10}}{1-s^{-1}}\right)^3 = \left(\frac{2-s^{10}-s^{-10}}{2-s-s^{-1}}\right)^3$$

Одним из базисных фактов теории функций комплексного переменного является

Теорема (Коши). *Для любого многочлена Лорана $p(s)$ его свободный член p_0 равен*

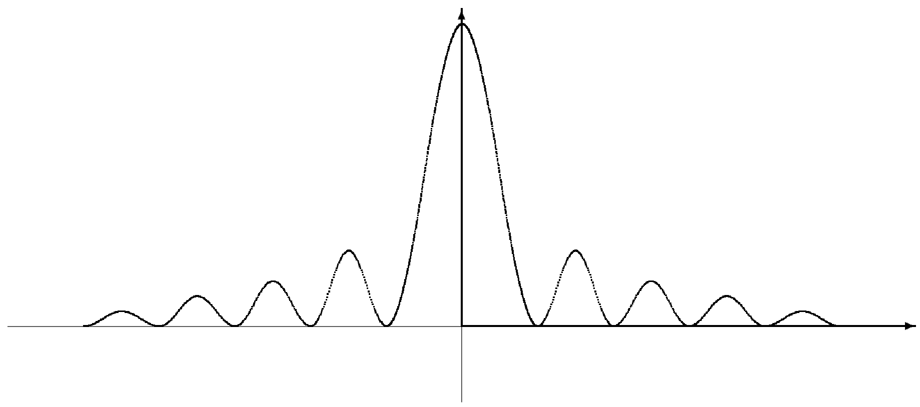
$$p_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{p(s)ds}{s},$$

где интеграл берется по любой окружности, содержащей начало координат.

Для наших целей наиболее удобной оказывается окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Вводя на этой окружности стандартный параметр φ, мы можем переписать наше подынтегральное выражение в виде:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{2-2\cos(10\varphi)}{2-2\cos(\varphi)}\right)^3 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(5\varphi)}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})}\right)^3 d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin(\varphi)}\right)^6 d\varphi \end{aligned}$$

Начертим график подынтегральной функции на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Мы знаем, что в нуле значение этой функции



равно 1 000 000, и функция сильно колеблется на отрезке.

Интеграл от “колеблющейся части” функции пренебрежимо мал по сравнению с интегралом по окрестности “стационарной точки” 0. Подинтегральная функция есть хорошо изученная классическая функция Бесселя, и ее интеграл можно просто найти в соответствующих таблицах для функций Бесселя.

В следующих лекциях мы выведем “явную” формулу для числа счастливых билетов. Оказывается, оно равно

$$\binom{6}{0}\binom{32}{5}-\binom{6}{1}\binom{22}{5}+\binom{6}{2}\binom{12}{5}$$

(проверьте!)

1.2. Общие положения.

Итак, на основании рассмотренного примера мы можем сделать некоторые выводы о задачах и методах, которыми мы будем заниматься.

- Комбинаторная задача (во всяком случае, большинство задач, рассматриваемых в нашем курсе) состоит в подсчете числа некоторых объектов, принадлежащих семействам конечных множеств. При этом у каждого семейства имеется свой номер (в задаче о числе счастливых билетов таким номером была сумма цифр трехзначного числа).

- Как правило, комбинаторная задача “в принципе” разрешима — какое-нибудь решение найти нетрудно. Проблема же состоит в том, чтобы найти “хорошее” решение.

- Определить, какое решение является хорошим тоже довольно трудно. Можно обычно лишь сравнить два решения.
- При решении комбинаторных задач очень полезно рассматривать производящие многочлены (или, более общо, производящие ряды). В нашем случае пользу принес производящий многочлен A_3. Операции с комбинаторными объектами естественнее всего выражаются в терминах производящих функций.
- Привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа) позволяет существенно повысить результативность решения комбинаторных задач.

1.3. Производящие функции и действия над ними.

Перейдем к строгим определениям.

Определение. *Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Мы будем рассматривать последовательности целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел.* Производящей функцией *(производящим рядом) мы будем называть запись вида*

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

Замечание. Не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно "значение производящей функции A в точке $s = s_0$". Переменная s является формальной, и ряд $a_0 + a_1 s_0 + a_2 (s_0)^2 + \ldots$ смысла не имеет. Единственное, что мы можем сказать про функцию $A(s)$, это, что ее значение в нуле равно a_0. Если, однако, производящий ряд является многочленом (т.е. все его коэффициенты кроме конечного числа равны нулю), то значение этого ряда в любой точке выражается конечной суммой и поэтому имеет смысл.

Определение. Суммой *двух производящих функций*

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \ldots$$

Произведением *производящих функций A и B называется производящая функция*

$$A(s)B(s) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \dots$$

Определение. *Пусть* $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ *и* $B(s) = b_1 s + b_2 s^2 + \dots$ *— две производящие функции, причем* $B(0) = 0$. Подстановкой *производящей функции B в функцию A называется производящая функция*

$$A(B(s)) = a_0 + a_1 b_1 s + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2)s^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)s^3 + \dots$$

Если, например, $B(s) = -s$, то $A(B(s)) = a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3 + \dots$.

Очевидно, что если обе производящие функции A и B являются многочленами, то определения суммы, произведения и подстановки производящих функций совпадают с определениями суммы, произведения и подстановки многочленов.

1.4. Элементарные производящие функции.

Поскольку неудобно всякий раз записывать производящие функции в виде ряда, для некоторых часто встречающихся функций введены сокращенные записи.

Определение.

$$1)\ (1+s)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}s^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}s^3 + \dots,$$

где α *— произвольное комплексное число.*

Коэффициент при s^n *в этой производящей функции называется* числом сочетаний из α по n элементов *(обозначение* $\binom{\alpha}{n}$*).*

$$2)\ \exp(s) = 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \dots$$

$$3)\ \log(\frac{1}{1-s}) = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots$$

$$4)\ \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$5)\ \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

При целом положительном значении α часть 1) определения совпадает с обычным определением степени многочлена. Пользуясь этим, мы можем получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, значения s = 1 и s = -1, получаем тождества

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\ldots+\frac{\alpha!}{\alpha!}=2^{\alpha} \tag{1.1}$$

$$1-\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}-\ldots+(-1)^{\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha!}=0 \tag{1.2}$$

для любого целого положительного значения α.

Между введенными элементарными функциями имеются естественные соотношения, которые также связаны с комбинаторными тождествами. Докажем, например, что

$$\exp(s)\exp(-s)=1.$$

Действительно, свободный член произведения равен 1, а при $n>0$ коэффициент при s^n равен

$$\frac{1}{n!0!}-\frac{1}{(n-1)!1!}+\frac{1}{(n-2)!2!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{0!n!}$$

Умножая это выражение на n!, получаем левую часть равенства (1.2) при $\alpha=n$, что и доказывает наше утверждение.

Упражнение 1.8. *Докажите следующие равенства:*

$$1)\sin^2(s)+\cos^2(s)=1;$$

$$2)(1+s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}=(1+s)^{\alpha+\beta};$$

$$3)\exp(\log(1-s)^{-1})=(1-s)^{-1};$$

$$4)\log(1+s)=s-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^3-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}s^n;$$

$$5)\log(1-s)^{-\alpha}=\alpha\log(1-s)^{-1}.$$

Упражнение 1.9. *Пусть функция $B=B(s)=b_1s+b_2s^2+b_3s^3+\cdots$ такова, что $B(0)=0$, $B'(0)=b_1\neq 0$. Докажите, что существует функция $A=A(s)=a_1s+a_2s^2+\cdots$, $A(0)=0$, такая что $B(A(s))=s$ и функция $C=C(s)=c_1s+c_2s^2+\cdots$, $C(0)=0$, такая что $C(B(s))=s$. Верно ли, что $A(s)=C(s)$?*

ЛЕКЦИЯ 2.

Производящие функции для известных последовательностей
Рекуррентные соотношения и производящие функции
Дифференцирование и интегрирование производящих функций

2.1. Деление производящих функций.

На предыдущей лекции мы научились складывать, вычитать и умножать производящие функции. Нам бы хотелось также и делить производящие функции, однако это возможно не всегда.

Упражнение 2.1. *Докажите, что не существует такого формального степенного ряда $B(s)$, что $sB(s) = 1$.*

Предложение. *Пусть $A(s)$ — формальный степенной ряд, причем $A(0)$ не равно 0. Тогда существует единственный формальный степенной ряд $B(s)$, такой что, что $A(s)B(s) = 1$.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. $b_0 = 1/a_0$. Пусть теперь все коэффициенты ряда B вплоть до степени n однозначно определены. Коэффициент при степени n+1 определяется из условия $a_0b_{n+1} + a_1b_n + \ldots + a_{n+1}b_0 = 0$. Это линейное уравнение на b_{n+1}, причем коэффициент a_0 отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет единственное решение.

Упражнение 2.2. *Только что доказанное утверждение очевидно неверно, если мы рассматриваем формальные степенные ряды с целыми коэффициентами. Однако при некотором дополнительном условии на ряд $A(s)$ он становится обратимым. Найдите самое слабое такое условие и докажите соответствующее утверждение.*

Замечание. Множество всех формальных степенных рядов с комплексными (вещественными, рациональными) коэффициентами образует (коммутативную) область целостности, которая является также алгеброй. Эта область целостности обозначается $\mathbb{C}[[s]]$ (соответственно $\mathbb{R}[[s]]$, $\mathbb{Q}[[s]]$).

Упражнение 2.3. *Докажите, что $\mathbb{C}[[s]]$ является кольцом главных идеалов.*

2.2. Производящая функция для последовательности Фибоначчи.

Последовательность Фибоначчи определяется соотношением $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ для $n > 1$. Ее первые члены: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Выведем производящую функцию для этой последовательности. Определяющее рекуррентное соотношение означает, что эта производящая функция $Fib(s) = s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \ldots$ удовлетворяет соотношению $(Fib(s) - s)/s = Fib(s) + Fib(s)s$, откуда $Fib(s) = s/(1 - s - s^2)$.

2.3. Числа Каталана.

2.3.1. Производящая функция для последовательности Каталана.

Еще одна очень известная последовательность — это **последовательность Каталана.** Ее первые члены: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...

Последовательность Каталана определяется рекуррентным соотношением $c_0 = 1, c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0$. Например, при n = 5: $c_5 = 14 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана:

$$Cat(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots = 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \ldots$$

Определяющее соотношение для производящей функции означает, что она удовлетворяет следующему уравнению:

$$Cat(s) = sCat(s)Cat(s) + 1$$

из которого легко найти саму производящую функцию:

$$Cat(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}.$$

Этот вид производящей функции позволяет найти формулу для чисел Каталана. Согласно общей формуле бинома Ньютона имеем:

$$c_n = \frac{(1/2)(1/2)(3/2)\ldots((2n-1)/2)4^{n+1}}{2(n+1)!}$$

или, умножая числитель и знаменатель на n! и сокращая на 2^{n+1}, получаем

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Эта формула дает и более простое рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = c_n \frac{4n+2}{n+2}.$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Известно не менее сорока их различных определений. Приведем две наиболее часто встречающиеся их реализации.

2.3.2. Правильные скобочные структуры.

Для задания порядка вычислений в алгебраических выражениях, в них расставляют скобки. Если стереть все элементы алгебраического выражения, кроме скобок, то, что останется, и будет правильной скобочной структурой. Например, (()(()()))().

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1. число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;

2. любой начальный отрезок правильной скобочной структуры содержит левых скобок не меньше, чем правых.

Наоборот, всякая последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

Будем считать условия 1) и 2) определением правильной скобочной структуры. Приведем правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

() ()() (()) ()()() ()(()) (())() (()()) ((()))

Каждой левой скобке в правильной скобочной структуре соответствует парная ей правая скобка. Эта скобка выделяется следующим правилом:

> двигаясь от выбранной левой скобки вправо считаем разность между числом левых и числом правых пройденных скобок (включая выбранную). Первая правая скобка, для которой эта разность обращается в ноль, считается парной к исходной левой скобке.

Упражнение 2.4. *Докажите, что указанным правилом скобки в правильной скобочной структуре разбиваются на пары.*

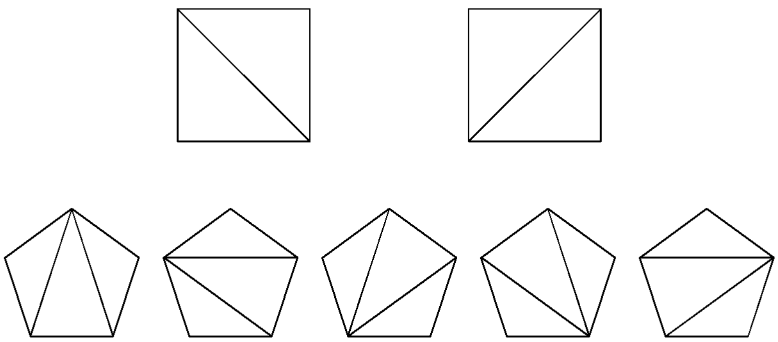
Обозначим число правильных скобочных структур из n пар скобок через b_n. Докажем, что это число равно c_n. Положим $b_0 = 1$. Рассмотрим в правильной скобочной структуре из $(n+1)$ пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру, и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру: $(\dots)\dots$. Если число пар внутренней структуры равно k, то во внешней структуре $n-k$ пар скобок. Наоборот, по любой паре скобочных структур из k и из $n-k$ скобок можно однозначно построить структуру из $n+1$ пары скобок, заключив первую структуру в скобки. Поэтому последовательность чисел b_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$b_{n+1} = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \ldots + b_n b_0,$$

и, следовательно, совпадает с последовательностью чисел Каталана.

2.3.3. Диагональные триангуляции многоугольников.

Рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник. *Диагональной триангуляцией* назовем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Всякая такая триангуляция содержит $n-1$ диагональ.



Вот все триангуляции 4-х и 5-тиугольников.

Пусть t_n — число триангуляций (n+2)-угольника. Докажем, что $t_n = c_n$. Перенумеруем вершины многоугольника числами от 0 до n+1. Рассмотрим произвольную триангуляцию и выделим треугольник, примыкающий к стороне [0,1]. Пусть k — номер третьей вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает (n+2)-угольник на k-угольник и (n-k+3)-угольник, каждый из которых триангулирован диагоналями. Наоборот, каждая такая пара триангуляций задает триангуляцию исходного многоугольника. Поэтому

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \ldots + t_n t_0.$$

и последовательность t_n совпадает с последовательностью Каталана.

2.3.4. Арифметические свойства чисел Каталана.

Различные комбинаторные представления для одной и той же последовательности помогают нам установить разнообразные свойства такой последовательности. Например, прямое доказательство того, что число $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ — целое, это трудное теоретико-числовое упражнение. Найдя же для этого числа комбинаторное представление, мы легко убеждаемся в том, что число целое. Приведем еще два рассуждения подобного рода.

Предложение. *Пусть число $n+2$ — простое, $n > 1$, тогда число Каталана c_n делится на $n+2$.*

Доказательство. Рассмотрим представление чисел Каталана триангуляциями правильных (n+2)-угольников. На множестве триангуляций группа вычетов Z_{n+2} действует поворотами (n+2)-угольника. При этом у нее нет неподвижных точек при $n > 1$. Если число $n+2$ — простое, то все множество триангуляций разбивается на орбиты длины $n+2$, что и доказывает утверждение.

Упражнение 2.5. *Докажите, что если число n+2 является степенью простого числа p, $n+2 = p^k$, то число Каталана c_n делится на p.*

Предложение. *Пусть число n — простое. Тогда $c_n = 2 \ mod \ n$.*

Пример.

$$c_2 = 2 = 2 \bmod 2;$$

$$c_3 = 5 = 2 \bmod 3;$$

$$c_5 = 42 = 2 \bmod 5.$$

Доказательство. Рассмотрим представление чисел Каталана через число правильных скобочных структур. На множестве правильных скобочных структур действует группа вычетов Z_{2n} по следующему правилу. Образующая этой группы представляется циклическим сдвигом влево на единицу. При таком сдвиге самая левая скобка стирается и заменяется вновь приписываемой самой правой скобкой; соответствующая ей правая скобка заменяется левой скобкой; остальные скобки не меняются. При $n > 1$ у действия этой группы нет неподвижных точек. Если число n простое, то у действия группы есть одна орбита длины 2. Эта орбита состоит из двух скобочных структур $()()\dots()$ и $(()\dots())$. Длины остальных орбит равны n или $2n$, что и доказывает утверждение.

Упражнение 2.6. *Докажите, что если число n есть степень простого числа p, $n = p^k$, то $c_n = 2 \mod p$.*

2.4. Рациональные производящие функции.

Вернемся к числам Фибоначчи и связанным с ними рекуррентным соотношениям. Последовательность Фибоначчи определяется линейным рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Исходя из этого соотношения и начальных значений последовательности, мы смогли найти явный вид производящей функции. Производящая функция оказалась при этом рациональной — отношением двух многочленов. На самом деле, в нашем выводе нигде не использовался специальный вид рекуррентного соотношения. Действуя точно таким же образом, мы можем доказать аналогичную теорему о производящей функции для произвольной последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением.

Теорема. *Пусть последовательность a_n задается линейным рекурентным соотношением порядка k с постоянными $c_0, \dots, c_{k-1}$:*

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + c_0a_n$$

и числа $a_0, \dots, a_k$ фиксированы. Тогда производящая функция $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ рациональна, $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, причем степень многочлена Q равна k, а степень $P(s)$ не превосходит k-1.

Доказательство теоремы повторяет, по существу, рассуждение для чисел Фибоначчи. Рекуррентное соотношение можно переписать в виде уравнения на производящую функцию:

$$A(s) - a_{k-1}s^{k-1} - a_{k-2}s^{k-2} - \dots - a_0 =$$
$$c_{k-1}(A(s) - a_{k-2}s^{k-2} - \dots - a_0)s + \dots$$
$$+c_0A(s)s^k$$

Разрешая это линейное уравнение относительно A(s), мы получаем утверждение теоремы.

Оказывается, что и наоборот, последовательность коэффициентов всякой рациональной производящей функции удовлетворяет рекуррентному соотношению.

Теорема. *Пусть $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, причем степень многочлена $Q(s)$ равна k, а степень многочлена $P(s)$ меньше k. Тогда коэффициенты производящей функции $A(s)$ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами.*

Докажите эту теорему самостоятельно.

Скажем несколько слов о рациональных функциях более общего вида. Пусть $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, где степень многочлена P(s) не меньше степени многочлена Q(s). Тогда можно представить функцию A(s) в виде $A(s) = P_1(s) + \frac{P_2(s)}{Q(s)}$, где степень многочлена $P_2(s)$ уже меньше степени многочлена Q(s). Тем самым, по предыдущей теореме, коэффициенты такой функции удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению начиная с некоторого номера. Обратная теорема тоже, конечно, справедлива.

2.5. Дифференцирование и интегрирование производящих функций

Определение. *Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция.* Производной *этой функции называется функция*

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots + n a_n s^{n-1} + \ldots$$

Интегралом *этой функции называется функция*

$$\left(\int A\right)(s) = a_0 s + a_1 s^2/2 + a_2 s^3/3 + \ldots + a_n s^{n+1}/(n+1) + \ldots$$

Нетрудно видеть, что формулы для производной и интеграла элементарных функций соответствуют обычным. Это позволяет подсчитывать производящие функции для большого числа разнообразных последовательностей. Подсчитаем, например, производящую функцию

$$f(s) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}s + \frac{1}{3\cdot 4}s^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}s^n + \ldots$$

Легко видеть, что $(s^2 f)''(s) = \log(1-s)^{-1}$, поэтому $f(s) = s^{-2}\left(\int \log\right)((1-s)^{-1})$, или, посчитав интеграл, получаем

$$f(s) = s^{-2}\left((s-1)\log((1-s)^{-1}) + s\right).$$

Задачи

1. Найти производящие функции для последовательностей

   а) $1, q, q^2, q^3, \ldots$;

   б) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$;

   в) $2, 6, 12, \ldots, (k+1)(k+2), \ldots$.

2. Рациональны ли производящие функции для последовательностей:

   а) $1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots$;

   б) $1, 1/4, 1/9, \ldots, 1/k^2, \ldots$?

3. Рассматриваем пути на прямой, состоящие из отрезков длины 1 вправо или влево, начинающиеся в 0 и не заходящие в отрицательную сторону. Найти производящую функцию для числа таких путей длины k , кончающихся

   а) в 0;

   б) в точке $N > 0$.

4. Путь на плоскости состоит из отрезков длины 1, идущих на север, восток или запад (на юг идти нельзя). Найти производящую функцию для числа таких путей длины k, начинающихся в 0 и не самопересекающихся.

5. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция для последовательности $a_0, a_1, \ldots$. Найти производящую функцию для последовательностей

   а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$;

   б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots$.

6. Доказать тождества для чисел Фибоначчи

   а) $f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

   б) $f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

   в) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

   г) $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

7. Двое играют в такую игру. Один задумывает число от 1 до 144, а второй пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые первый отвечает "да" или "нет". В случае ответа "да" второй платит \$1, в случае ответа "нет" он платит \$2. Как он должен играть: чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным?

ЛЕКЦИЯ 3. Число разбиений числа n. Теорема Эйлера и диаграммы Юнга.

На первой лекции, решая задачу про число счастливых билетов, мы уже изучали вопрос о числе представлений натурального числа n в виде суммы k слагаемых. Давайте оставим в стороне ограничение на величину слагаемых (в задаче о числе счастливых билетов слагаемые должны были быть цифрами, поэтому их величина не превышала 9). Будем решать задачу, сколькими способами можно представить число n в виде суммы k неотрицательных слагаемых. Два представления $n = a_1 + a_2 + \cdots a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ будем считать различными, если хотя бы для одного индекса $i, \leq i \leq k, \quad a_i$ не равно b_i. Такое представление числа n будем называть его *разложением.*

Предложение 1. *Число различных разложений числа n в виде суммы k слагаемых равно $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Доказательство. Представим себе число n в виде набора из n одинаковых шариков, лежащих на прямой. Каждому разложению числа n сопоставим расстановку $k-1$ палочки между шариками. Элемент a_i разложения равен числу шариков между палочками с номерами $i-1$ и i. Вместе палочки и шарики составляют $n+k-1$ предмет. При этом назначить $k-1$ предметов палочками можно ровно $\binom{n+k-1}{k-1}$ способами. Утверждение доказано.

Несложно выписать и производящую функцию для числа разложений. По сути, мы уже сделали это на первой лекции.

Предложение 2. *Число разложений на k слагаемых дается производящей функцией $B_k(x) = (1-x)^{-k}$.*

Сложнее подсчитать число разбиений числа n. *Разбиением* мы будем называть класс эквивалентности разложений, для которых ни одно из слагаемых не равно 0. При этом два разложения будем считать эквивалентными, если одно можно получить из другого перестановкой слагаемых. Вот все разбиения маленьких чисел:

$$
\begin{array}{lcll}
n=1 & 1 & & \\
n=2 & 2 & = & 1+1 \\
n=3 & 3 & = & 2+1=1+1+1 \\
n=4 & 4 & = & 3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1 \\
n=5 & 5 & = & 4+1=3+2=3+1+1= \\
 & & = & 2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1
\end{array}
$$

Обратите внимание, что каждое разбиение в таблице записано в порядке убывания слагаемых.

Обозначая число разбиений числа n через p_n, получаем таблицу начальных значений последовательности p_n:

n	0	1	2	3	4	5
p_n	1	1	2	3	5	7

Наша ближайшая задача — найти производящую функцию для последовательности p_n.

Вот полезная геометрическая интерпретация разбиений. Каждое разбиение удобно представлять в виде таблицы Ферре или таблицы Юнга:

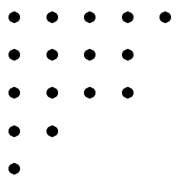


Таблица Ферре

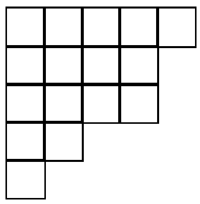


Таблица Юнга

Например, нарисованная таблица соответствует разбиению $5+4+4+2+1$ числа 16. На диаграммах Юнга действует естественная операция сопряжения — отражения относительно диагонали. Некоторые диаграммы при этом переходят в себя. Такие диаграммы (и соответствующие им разбиения) будем называть симметричными. Используя диаграммы Ферре или Юнга, можно доказывать различные свойства числа разбиений. Докажем, например,

Предложение 3. *Число симметричных разбиений числа n равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые.*

Доказательство. Для доказательства поставим в соответствие каждой симметричной диаграмме диаграмму, составленную из ее “центральных крюков”. Наоборот, взяв диаграмму, составленную из различных нечетных строк, мы можем “сломать” каждую такую строку посередине и составить эти строки, получив тем самым симметричную диаграмму.

Подсчитаем теперь число разбиений на части, удовлетворяющие некоторым ограничениям. Пусть $p_1(s)$ — производящая функция для числа разбиений числа n на части, равные 1. Очевидно, что для каждого числа таких разбиений ровно одно, поэтому $p_1(s) = 1+s+s^2+s^3+\cdots = (1-s)^{-1}$. Число разбиений числа n на части, равные двойке, равно единице, если n четно и нулю, если n нечетно. Поэтому $p_2(s) = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + \cdots = 1/(1 - s^2)$. Число разбиений числа n на части, не превосходящие двух, равно, тем самым, $p_1(s)p_2(s) = 1/((1-s)(1-s^2))$. Аналогично, число разбиений n на части, равные трем, равно $p_3(s) = 1/(1 - s^3)$, а число разбиений n на части, не превосходящие трех, равно $1/((1 - s)(1 - s^2)(1 - s^3))$. Продолжая это рассуждение, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1 (Эйлер). *Производящая функция для числа разбиений числа n имеет вид*

$$p(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)(1-s^4)\dots}$$

Для того, чтобы придать этому утверждению смысл, мы должны пояснить, что понимается под бесконечным произведением, стоящим в знаменателе выражения в правой части. Это произведение должно быть формальным степенным рядом $q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \cdots = (1 - s)(1 - s^2)\dots$ Для того, чтобы сказать, чему равны коэффициенты $q_0, q_1, q_2, \dots$, посмотрим сначала на конечные произведения.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1-s & = & 1 & -s & & & & & & \\
(1-s)(1-s^2) & = & 1 & -s & -s^2 & +s^3 & & & & \\
(1-s)(1-s^2)(1-s^3) & = & 1 & -s & -s^2 & & +s^4 & +s^5 & & -s^6 \\
(1-s)\dots(1-s^4) & = & 1 & -s & -s^2 & & & +s^5 & +s^6+\cdots & \\
(1-s)\dots(1-s^5) & = & 1 & -s & -s^2 & & & +s^5 & & +\cdots
\end{array}$$

Видно, что коэффициенты в этих конечных произведениях "стабилизируются" — начиная с некоторого момента перестают изменяться. Это и неудивительно — умножение на $1 - s^k$ не меняет коэффициентов многочлена при степенях, меньших k. Поэтому мы можем просто положить q_k равным коэффициенту при s^k в многочлене $(1-s)(1-s^2)\ldots(1-s^k)$.

Заметим, что теперь мы можем выписать аналогичные бесконечные произведения и для разбиений с ограничениями:

Число разбиений на различные слагаемые дается производящей функцией

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots$$

Число разбиений на различные нечетные слагаемые дается производящей функцией

$$(1+s)(1+s^3)(1+s^5)\ldots$$

Число разбиений на нечетные слагаемые дается производящей функцией

$$\frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\ldots}$$

и т.д.

Дальнейшие вычисления коэффициентов ряда q дают

$$q(s) = 1 - s - s^2 + s^5 + s^7 - s^{12} - s^{15} + s^{22} + s^{26} -$$

$$- s^{35} - s^{40} + s^{51} + s^{57} - s^{70} - s^{77} + s^{92} + s^{100} \ldots$$

Эти вычисления и привели Эйлера к гипотезе, которую мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2 (тождество Эйлера).

$$q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(s^{\frac{3k^2-k}{2}} + s^{\frac{3k^2+k}{2}} \right)$$

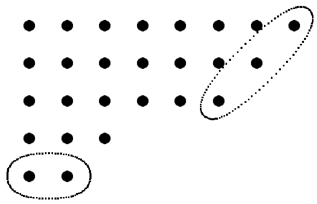
Доказательство. При раскрытии скобок в ряд

$$q(s) = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots$$

входят те же члены, что и в ряд для числа разбиений с различными слагаемыми $(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots$. Однако некоторые члены входят при этом со знаком плюс, а некоторые со знаком минус.

Знак плюс имеют члены, соответствующие разбиениям на четное число слагаемых; знак минус — члены, соответствующие разбиениям на нечетное число слагаемых. Мы докажем, что число разбиений на четное и нечетное число слагаемых одинаково для всех значений кроме исключительных.

Представим каждое разбиение в виде диаграммы Ферре. Важную роль в доказательстве будут играть нижняя строчка диаграммы и ее “боковая диагональ”.



Пусть l — длина нижней строчки, d — длина диагонали, k — число строчек в диаграмме, т.е. число слагаемых в разбиении.

Определим отображение множества диаграмм с различными строчками в себя.

Если $l < d$, то отрежем от диаграммы нижнюю строчку и приклеим ее к диагонали.

Если $l = d < k$, то проделаем то же самое.

Если $l > d$ и $k > l$, то наоборот, отрежем диагональ и приклеим ее ниже нижней строчки.

С остальными (исключительными) диаграммами не будем делать ничего.

Наше отображение меняет четность числа слагаемых в разбиении для всех неисключительных диаграмм. Поэтому, если исключительных диаграмм нет вообще, то коэффициент при s^n в разложении $q(s)$ равен нулю.

Исключительные диаграммы определяются условиями:
k = l = d
или
k = d, l = k + 1.

В первом случае имеем $n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k-1) = (3k^2 - k)/2$.

Во втором случае $n = (k+1) + (k+2) + \cdots + 2k = (3k^2 + k)/2$.

Тождество Эйлера доказано.

Тождество Эйлера дает эффективный способ вычисления числа разбиений числа n. Именно, справедливо следующее рекуррентное соотношение

Предложение 4.

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - \cdots$$

Действительно, это очевидное следствие равенства

$$p(s)q(s) = 1.$$

В дальнейшем изложении лучше всего процитировать изобретателя "линейки Фукса" Д.Б.Фукса (Квант, №8(1981), с. 15).

> "Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел p_n. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3-4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке +, во второй +, в пятой -, в седьмой -, в двенадцатой +, в пятнадцатой + и т.д., насколько хватит длины полоски. оставшуюся часть листа также положите перед собой вертикально и, отступя 10-15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите известные вам числа p_n, начиная с p_0: 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это следующее значение функции p_n. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел p_n высотой в ваш лист."

Задачи

ПС — задачник Полиа и Сеге, упоминавшийся выше.
С — книга Стенли, также упоминавшаяся выше.

1. (ПС, 1.1.1) Сколькими способами можно разменять рубль на монеты в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек?

2. (ПС, 1.1.5) Сколькими способами можно взвесить 78 г с помощью разновесок 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 г
   а) на одночашечных весах?
   б) на двухчашечных весах?
   (Применение двух разных разновесок одного веса дает различные взвешивания.)

3. (ПС, 1.1.16) Найти
$$(1+qs)(1+qs^2)(1+qs^4)\dots$$

4. (ПС, 1.1.18) Всякое число может быть записано в десятичной системе счисления, причем единственным образом, поэтому
$$(1+s+s^2+\dots+s^9)(1+s^{10}+s^{20}+\dots+s^{90})\dots = 1/(1-s)$$

5. (ПС, 1.1.19)
$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)(1+s^4)\dots = 1/((1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots)$$

6. Доказать тождества Гаусса

   а)
$$\frac{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\dots}{(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots} = 1-2t+2t^2-2t^3+\dots$$

   б)
$$\frac{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\dots}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\dots} = 1+t+t^3+t^6+t^{10}+\dots$$

7. (ПС 1.1.20) Каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столькими же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечетных (быть может и совпадающих) слагаемых.

8. (ПС 1.1.21) Натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1}-1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых считать различными.

9. (С, 1.1.14) Пусть $\mu(n)$ — функция Мебиуса. Тогда
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^n)^{-\mu(n)/n} = exp(x).$$

10. Найти производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

11. (С 1.24) Пусть $P(x)$ — производящая функция для числа разбиений, $\Sigma(x)$ — производящая функция для числа делителей. Тогда
$$P'(x) = P(x)\Sigma(x).$$

ЛЕКЦИЯ 4. Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа

Как мы знаем, правильные скобочные структуры перечисляются числами Каталана. Выпишем все правильные скобочные структуры до порядка 4:

1	2	3	4	
()	(())	((()))	(((())))	(())(())
ab	aabb	aaabbb	aaaabbbb	aabbaabb
	()()	(()())	((()()))	(())()()
	abab	aababb	aaababbb	aabbabab
		(())()	((())())	()((()))
		aabbab	aaabbabb	abaaabbb
		()(())	(()(()))	()(()())
		abaabb	aabaabbb	abaababb
		()()()	(()()())	()(())()
		ababab	aabababb	abaabbab
			((()))()	()()(())
			aaabbbab	ababaabb
			(()())()	()()()()
			aababbab	abababab

Если обозначить левую скобку буквой a, а правую — буквой b, то можно переписать скобочные структуры в виде слов в алфавите $\{a, b\}$. При этом мы получаем не все слова в алфавите $\{a, b\}$, а только некоторые. Например, слова a, b, aa, ba не соответствуют никаким правильным скобочным структурам. Конечно, то же самое верно и для записи скобочных структур в алфавите $\{(,)\}$ из левой и правой скобок.

Определение 1. *Пусть $A = \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — произвольный конечный набор различных букв.* Словом *в алфавите A называется произвольная конечная последовательность букв $\beta_1 \dots \beta_m$, где $\beta_i \in A$ при $i = 1, \dots, m$. Число m называется* длиной *слова.* Языком *над алфавитом A называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите A.*

Пустое слово λ имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.

Например, множество правильных скобочных структур образует язык над алфавитом $\{a, b\}$ (или над алфавитом $\{(,)\}$). Этот язык называется языком Дика.

Пример. *Рассмотрим язык F, состоящий из слов в алфавите $\{a, b\}$, не содержащих двух букв b подряд: $a, b, ab, ba, aaa, \dots$.*

Определение 2. Производящей функцией $l(t)$ *языка L называется производящая функция*

$$l(t) = l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \dots$$

где l_k есть число слов длины k в языке L.

Выписывание всех правильных скобочных структур данной длины — трудоемкий процесс, требующий упорядочения. Для этого рассмотрим два

Правила вывода в языке Дика.

Введем в рассмотрение букву r:

1. $r \to \lambda$
2. $r \to arbr$

Стрелка в правилах вывода заменяет фразу "всякое вхождение символа r в слово можно заменить на слово, стоящее справа от стрелки". Покажем, как работают эти правила: выведем произвольную скобочную структуру по этим правилам. Пусть нам нужно вывести слово $aabaabbb$. Вот, как выглядит вывод:

$$\begin{aligned} r \ \overset{2)}{\to}\ & arbr \overset{1)}{\to} arb \overset{2)}{\to} aarbrb \overset{1)}{\to} aabrb \overset{2)}{\to} aabarbrb \overset{1)}{\to} aabarbb \\ & \overset{2)}{\to} aabaarbrbb \overset{1),1)}{\to} aabaabbb \end{aligned}$$

Над каждой стрелкой в выводе написан номер правила вывода, применявшегося на этом шаге.

Правила вывода в языке Дика можно понимать следующим образом: Всякое слово в языке Дика есть либо
1) пустое слово
либо
2) слово, в котором внутри самой левой пары скобок стоит некоторое слово языка Дика, и после этой пары стоит некоторое слово языка Дика.

Ясно, что для каждого слова языка Дика такое представление единственно.

Вычислим с помощью правил вывода значение производящей функции для языка Дика. Для этой цели выпишем "некоммутативный производящий степенной ряд" для языка Дика. Этот ряд представляет собой формальную сумму всех слов языка, перечисляемых в порядке возрастания длины:

$$D(a,b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \cdots$$

Теорема 3. *Ряд D удовлетворяет уравнению*

$$D(a,b) = \lambda + aD(a,b)bD(a,b)$$

Доказательство. Действительно, в левой части равенства стоят все слова языка Дика. В правой записано утверждение:

> "Всякое слово языка Дика есть либо 1) пустое слово; либо 2) слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и за этой парой стоит некоторое слово языка Дика. При этом такое представление единственно."

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a = t, b = t, \lambda = t^0 = 1$. Получим уравнение

$$D(t,t) = 1 + t^2 D^2(t,t)$$

Или, обозначив $D(t,t)$ через $d(t)$,

$$d(t) = 1 + t^2 d(t)$$

Это уравнение, как мы знаем, дает выражение производящей функции для чисел Каталана.

Приведем обобщение этого рассуждения.

Определение 3. *Слово $w = \beta_1 \dots \beta_k$ в языке L называется* неразложимым*, если никакое его непустое подслово $\beta_{i+1} \dots \beta_{i+l}$ не принадлежит языку L.*

Предположим, что язык L обладает следующими свойствами:

1. Пустое слово входит в язык L;
2. Начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;
3. Если между любыми двумя буквами любого слова языка L вставить слово языка L, то получится слово языка L.
4. Если из любого слова языка L выкинуть подслово, входящее в язык L, то получится слово языка L.

Пусть $n(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \cdots$ — производящая функция для числа неразложимых слов языка L, $l(t) = l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots$ — производящая функция для числа всех слов языка.

Теорема 4. $l(t) = n(tl(t))$

Доказательство. Сопоставим каждому неразложимому слову $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$ в языке L правило вывода

$$r \to \lambda$$

$$r \to \alpha_{i_1} r \alpha_{i_2} r \dots \alpha_{i_k} r$$

Тогда вывод однозначен. Действительно, пусть $\beta_1 \dots \beta_m$ — произвольное слово языка L. Если оно неразложимо, то оно представляется в виде правой части правила вывода

$$r \to \beta_1 r \beta_2 r \dots \beta_m r\ ,$$

где каждое вхождение символа r следует заменить на пустое слово. Если же слово разложимо, то найдем самое правое непустое подслово в нем, выкинем его и повторим рассуждение.

Таким образом некоммутативная производящая функция для языка L удовлетворяет уравнению

$$L(a_1, \dots, a_m) = \lambda + \alpha_{11} L(a1, \dots, a_m) \alpha_{12} L(a1, \dots, a_m) \dots + \dots$$

Делая подстановку $\lambda = 1, a_i = t$, получаем утверждение теоремы.

Пример. *Для языка Дика* $n(t) = 1 + t^2$. *Неразложимые слова — это* λ *и* ab.

Упражнение 4.1. *Сформулируйте и докажите аналог теоремы для случая, когда язык* L *не содержит пустого слова.*

Одного символа зачастую бывает недостаточно для построения грамматики языка. Дадим формальное определение грамматики.

Определение 4. *Пусть* $R = \{r_1, \ldots, r_l\}$ *— конечное множество символов, не входящих в алфавит* A. Правилом вывода *называется запись вида*

$$r_i \to w$$

где $r_i \in R$, *а* w *— слово в алфавите* $A \bigcup R$. *Множество* G *(конечное или бесконечное) правил вывода*

$$r_1 \to w_{11}$$

$$r_1 \to w_{12}$$

$$\ldots$$

называется грамматикой *(над алфавитом* A*). Слово в алфавите* A порождается символом r_i, *если оно может быть получено цепочкой подстановок, задаваемых правилом вывода, из символа* r_i. *Язык* L_i порождается символом r_i, *если все слова языка* L_i *, и только они, порождаются символом* r_i. *Грамматика* G *является* грамматикой с однозначным выводом, *если каждое выводимое в ней из символа* r_i *слово единственным образом представимо в виде правой части одного из правил вывода* $r_i \to w_{ik}$.

Замечание. Здесь дано определение контекстно-свободной грамматики, которые только и будут рассматриваться в нашем курсе.

В связи с производящими функциями нас будут интересовать, в основном, грамматики с однозначным выводом.

Пример. *Рассмотрим язык из примера* F. *Вот грамматика для него*

$$r_1 \to \lambda$$

$$r_1 \to b$$

$$r_1 \to r_2 b$$

$$r_1 \to r_2$$

$$r_2 \to r_1 a$$

Эта грамматика читается так:

1) всякое слово в языке F есть либо пустое слово, либо слово b, либо слово, кончающееся на a, либо слово, кончающееся на ab;

2) всякое слово, кончающееся на a, есть произвольное слово в языке F, к которому приписано a.

Упражнение 4.2. *Докажите, что эта грамматика действительно описывает язык F и что вывод в ней однозначен.*

Упражнение 4.3. *Придумайте для языка F порождающую грамматику с одним порождающим символом и однозначным выводом*

Теорема 5. *ПустьG — грамматика с однозначным выводом для языка L. Пусть $r_i(t)$ — производящая функция для числа слов в языке L, выводимых из символа r_i. Тогда производящие функции r_i удовлетворяют системе уравнений*

$$r_i(t) = \sum_j t^{\nu_{ij}} \prod_k r_k^{\alpha_{kj}}(t)$$

где ν_{ij} число символов из A в слове w_{ij} , α_{kj} — число символов r_k в w_{kj}.

Доказательство. Поступим, как и в ситуации с одним порождающим символом — введем некоммутативные производящие степенные ряды для числа слов, порождаемых символами r_i. Ввиду однозначности представления каждого слова в виде правой части правила вывода получаем систему уравнений для некоммутативных рядов. Делая подстановку $\lambda = t^0 = 1, a_i = t$, получаем систему уравнений на производящие функции для числа слов.

Посмотрим повнимательнее на равенство, выведенное нами в теореме 4. Это функциональное уравнение связывает производящие функции для числа слов в языке и числа неразложимых слов в языке. Нам бы хотелось уметь решать его, если одна из функций задана. Оказывается, что это всегда возможно.

Чтобы привести наше уравнение к классической форме, домножим обе его части на t и положим $tl(t) = \tilde{l}(t)$

$$\tilde{l}(t) = tk(\tilde{l}(t)) \qquad (4.1)$$

Такое уравнение называется уравнением Лагранжа, и для него справедлива следующая

Теорема 6 (Лагранж). *Пусть в уравнении (4.1) задана одна из производящих функций $k(t), k(0) \neq 0$ или $\tilde{l}(t) \quad (\tilde{l}(0) = 0, \quad \tilde{l}'(0) \neq 0$. Тогда вторая производящая функция однозначно восстанавливается по заданной.*

Доказательство. Пусть

$$\tilde{l}(t) = \tilde{l}_1 t + \tilde{l}_2 t^2 + \cdots$$

$$k(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots$$

Уравнение (4.1) переписывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 t + \tilde{l}_2 t^2 + \tilde{l}_3 t^3 + \cdots &= \\ k_0 t + k_1 t(\tilde{l}_1 t + \tilde{l}_2 t^2 + \cdots) + k_2 t(\tilde{l}_1^2 t^2 + 2\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 t^3 + \cdots) + k_3 t(\tilde{l}_1^3 t^3 + \cdots & \end{aligned} \tag{4.2}$$

Докажем сначала, что если функция $\tilde{l}(t)$ задана, то $k(t)$ восстанавливается по ней, причем однозначно. Доказательство проведем по индукции.

Коэффициент k_0 определяется равенством $k_0 = \tilde{l}_1$. Пусть теперь коэффициенты $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ определены. Тогда коэффициент k_n определяется из уравнения, составленного приравниванием коэффициентов в левой и правой частях равенства (4.2):

$$k_n \tilde{l}_1^n + k_{n-1}\lambda_{n-1,n} + k_{n-2}\lambda_{n-2,n} + \cdots + k_1 \tilde{l}_{n-1} = \tilde{l}_n \tag{4.3}$$

Здесь через $\lambda_{m,n}$ обозначены коэффициенты при t^n в производящих функциях $\tilde{l}^m(t)$. Это линейное уравнение относительно k_n, причем коэффициент при $k_n (= \tilde{l}_1^n)$ отличен от нуля, значит k_n из уравнения (4.3) однозначно определяется. С другой стороны, если функция $k(t)$ задана, то мы должны положить $\tilde{l}_1 = k_0$. Коэффициенты $\tilde{l}_n$ определяются равенством (4.3), так как все коэффициенты $\lambda_{m,n}(m \leq n)$ являются многочленами от $\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_{n-1}$. Доказательство окончено.

Замечание. Если коэффициенты функции l — целые неотрицательные числа и $l_1 = 1$, то коэффициенты функции k — целые числа. При этом, однако, они могут оказаться отрицательными.

Задачи

1. Найти производящую функцию для языка F.

2. Ввести языки для систем путей из предыдущих лекций, построить для них производящие грамматики и проверить результаты о производящих функциях для них.

3. Напишите правила вывода для языка правильных скобочных структур из двух типов пар скобок и выведите производящую функцию для него.

4. Постройте контекстно-свободную грамматику для языка правильных арифметических выражений в алфавите $\{(,),+,1\}$ если

   а) длина числа равна 1;

   б) длина числа может быть больше 1.

5. Построить контекстно-свободные грамматики для языков

$$L_1 = \{a^{3i}b^i | i \geq 1\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j | i \geq j \geq 0\}$$

$$L_3 = \{\text{число вхождений буквы } a \text{ вдвое больше числа вхождений буквы } b\}$$

$$L_4 = \{\text{множество палиндромов в алфавите из двух букв}\}$$

   и найти производящие функции для этих языков.

6. Пример не контекстно-свободной производящей грамматики

$$x_0 \to yxy$$

$$yx \to yz$$

$$zx \to xxz$$

$$zy \to xxy$$

$$x \to a$$

$$y \to \lambda$$

   Докажите, что эта грамматика производит язык $\{a^{2^n}\}$ в алфавите $\{a\}$.

ЛЕКЦИЯ 5.

5.1. Формулы включения-исключения

Обратимся к очень простой общей теореме формальной логики. Пусть B — какое-либо конечное множество, элементы которого могут обладать некоторыми из свойств $c_1, \dots, c_m$. Пусть $N(c_i), 1 \leq i \leq m$ — число элементов множества B, обладающих свойством c_i, $N(c_i, c_j), i \neq j$ — число элементов, обладающих одновременно двумя свойствами c_i и c_j; $N(c_i, c_j, c_k), i \neq j, j \neq k, k \neq i$ — число элементов, обладающих одновременно тремя свойствами c_i, c_j и c_k; и т.п. Обозначим также через $N(1)$ общее число элементов в множестве B.

Теорема 7 (принцип включения-исключения). *Число элементов в множестве B, не обладающих ни одним из свойств $c_i, i = 1, \dots, m$ равно*

$$N(1) - N(c_1) - N(c_2) - \cdots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \cdots - N(c_1, c_2, c_3) - \cdots.$$

Доказательство. Разобьем все элементы множества B на группы: B_0, $B_1, \dots, B_m$, причем группа B_l состоит из элементов, обладающих ровно l свойствами. Рассмотрим последовательно выражения

$$N(1)$$

$$N(1) - N(c_1) - \cdots - N(c_m)$$

$$N(1) - N(c_1) - \cdots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \cdots + N(c_{m-1}, c_m)$$

$$\cdots$$

Каждому из этих выражений сопоставим расстановку целых чисел на группах B_l. Первое выражение соответствует присвоению каждой группе числа 1 — мы учли все элементы по одному разу. Второму выражению соответствует расстановка чисел $B_l \to (1 - l)$, так как элементы группы B_l мы при вычитании учли l раз. Третьему выражению соответствует расстановка чисел $\binom{1-l+l}{2}$, и т.п. Таким образом, переход от выражения с номером l к выражению с номером $l+1$ не затрагивает числа на множествах $B_0, \dots, B_l$; эти числа равны $1 - \binom{l}{1} + \binom{l}{2} - \cdots + (-1)^l \binom{l}{l} = 0$ для всех l кроме $l = 0$, что и доказывает теорему. ▹

Существует простое мнемоническое правило для запоминания принципа включения-исключения: пусть 1 соответствует объектам, обладающим всеми свойствами, тогда $1 - c_1$ — выражение для объектов, не обладающих свойством c_1, $1 - c_2$ - выражение для объектов, не обладающих свойством $c = 2$ и т.д. Выражение для объектов, не обладающих ни одним из свойств $c_1, \dots, c_m$ будет иметь вид

$$(1 - c_1)(1 - c_2)\dots(1 - c_m)$$

Откуда, раскрывая скобки, получаем

$$(1 - c_1)\dots(1 - c_m) = 1 - c_1 - c_2 - \dots - c_m + c_1c_2 + \dots - c_1c_2c_3 \cdots$$

Применим принцип включения-исключения для нахождения числа счастливых билетов.

Наблюдение. Число счастливых билетов равно числу билетов с суммой 27. Действительно, пусть билет $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$ — счастливый. Поставим ему в соответствие билет $a_1b_1c_1(9 - a_2)(9 - b_2)(9 - c_2)$, сумма цифр которого равна 27. Это соответствие, очевидно, взаимно-однозначно.

Рассмотрим все возможные расстановки неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях. Введем шесть свойств таких расстановок.

Свойство u_l состоит в том, что значение числа на l-й позиции не меньше 10.

Общее число расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шесть позиций равно $\binom{32}{5}$. Число расстановок, удовлетворяющих свойству u_l, одинаково для всех $l = 1, \dots, 6$ и равно $\binom{22}{5}$. Действительно, мы ставим число 10 в l-ю позицию, а затем произвольно расставляем в шесть позиций шесть чисел с общей суммой 17.

Аналогично число расстановок, удовлетворяющих одновременно двум свойствам u_l и u_k, одинаково для любой пары свойств и равно $\binom{12}{5}$: мы ставим число 10 в l-ю и k-ю позиции и произвольным образом расставляем шесть чисел с суммой 7. Число же расстановок, удовлетворяющих одновременно трем и более свойств, равно нулю, так как общая сумма всех чисел меньше 30. Таким образом, мы можем сосчитать общее число расстановок, не удовлетворяющих ни одному из свойств u_l. Это число и будет в точности равно числу счастливых билетов.

Предложение 5. *Число счастливых билетов равно*

$$\binom{32}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5}$$

Решим с помощью метода включения-исключения еще одну задачу, имеющую большое число приложений.

Задача о беспорядках. Перестановка π чисел $(1, 2, 3, \dots, n$ называется беспорядком, если $\pi(k) \neq k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Найти число беспорядков.

Вот начало таблицы беспорядков:

n	0	1	2	3	4
$d(n)$	1	0	1	2	9

Введем n свойств перестановок. Свойство c_l будет означать, что $\pi(l) = l$, т.е. l-й элемент стоит в точности на l-м месте. Число всех перестановок равно $n!$. Число перестановок, удовлетворяющих свойству c_l, равно $(n-1)!$ — мы фиксируем один элемент перестановки, а остальные переставляются произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих двум свойствам c_k и c_l, равно $(n-2)!$ — два элемента перестановки фиксируются, а остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих m свойствам, равно $(n-m)!$. Таким образом, мы получаем формулу для числа беспорядков

$$d(n) = n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots,$$

или, вынося за скобку коэффициент $n!$,

$$d(n) = n!(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots)$$

При $n \to \infty$ выражение в скобках стремится, как хорошо известно, к e^{-1}. Таким образом, беспорядки составляют приблизительно $1/e$-ю часть всех перестановок. Более того, можно доказать, что число беспорядков является ближайшим целым к числу $n!/e$.

5.2. Аналитические свойства функций, представляемых степенными рядами, и асимптотика коэффициентов.

При решении перечислительных задач зачастую приходится интересоваться поведением числа решений задач при росте перечисляющего параметра. Это особенно важно, если мы хотим, например, перечислять объекты на компьютере и пытаемся оценить время работы программы.

Определение 5. *Функции* $f : N \to R$ *и* $g : N \to R$ имеют одинаковую асимптотику *при* $n \to \infty$, *если существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ *и он равен 1. Функция* f растет медленнее *функции* g, *если существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ *и он равен 0. В последнем случае говорят также, что функция* g растет быстрее *функции* f.

При вычислении асимптотики некоторые функции мы считаем "образцами", а другие "сводим" к этим образцам. В качестве "образцов" берутся обычно наиболее простые функции: экспонента a^n при различных значениях основания a, степенная функция n^α при различных значениях показателя α, факториал $n!$, логарифм $\log n$, а также их произведения в различных комбинациях.

Например, коэффициенты производящей функции $-\log \frac{1}{1-s}$ растут как $1/n$.

Упражнение 5.1. *Найдите асимптотику коэффициентов функции* $(1-s)^{1/2}$.

Наиболее простой и наиболее часто используемый способ оценки скорости роста коэффициентов производящей функции дает следующая

Теорема 8. *Пусть ряд* $F(s)$ *сходится в некотором круге радиуса* r. *Тогда последовательность коэффициентов этого ряда растет медленнее, чем* $(1/r+\epsilon)^n$ *для любого положительного числа* ϵ.

Доказательство. Действительно, согласно теореме Коши радиус сходимости степенного ряда равен $\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}\right)^{-1}$.

Следствие 1. *Если ряд сходится на всей плоскости, то последовательность его коэффициентов растет медленнее, чем* ϵ^n *для любого* $\epsilon > 0$.

Пример. *Таков, например, ряд* $\exp(s)$.

В курсе теории рядов доказывается также следующее полезное

Предложение. *Пусть функция задается степенным рядом* $F(s)$, *сходящимся в некоторой окрестности начала координат. Тогда радиус сходимости ряда* $F(s)$ *равен расстоянию от начала координат до ближайшей к началу координат особой точки этой функции на комплексной плоскости.*

Пример. *Рассмотрим производящую функцию для чисел Фибоначчи* $Fib(s) = \frac{1}{1-s-s^2}$. *Ее особенности — это те значения переменной* s, *для которых знаменатель дроби обращается в ноль, т.е. точки* $s_1 = (-1-\sqrt{5})/2$ *и* $s_2 = (-1+\sqrt{5})/2$. *Ближайшей к началу координат из них является точка* s_2, *поэтому радиус сходимости ряда* $Fib(s)$ *равен*

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Упражнение 5.2. *Найти радиус сходимости и оценить скорость роста коэффициентов для функции* $Cat(s)$, *производящей для чисел Каталана.*

Перейдем к более детальному изучению асимптотики коэффициентов.

Лемма. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *положительных чисел такова, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = A\frac{n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{n^k + \beta_1 n^{k-1} + \cdots + \beta_k} \tag{5.4}$$

для всех достаточно больших n, *причем* $\alpha_1 \neq \beta_1$. *Тогда* a_n *растет как* $\mathrm{const} \cdot A^n \cdot n^{(\alpha_1 - \beta_1)}$.

Пример. Для чисел Каталана

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4n+2}{n+2} = 4\frac{n+1/2}{n+2},$$

поэтому $c_{n+1} \sim \mathrm{const} \cdot 4^n \cdot n^{-3/2}$.

Пример. Найдем асимптотику коэффициентов для функции $(a-s)^\alpha$. В целом ряде случаев эта асимптотика нам уже известна. Например, при $\alpha = -1$ и a — вещественном положительном. Согласно определению функции $(a-s)^\alpha$ имеем

$$(a-s)^\alpha = a^\alpha(1-\frac{s}{\alpha}) = a^\alpha(1-\frac{\alpha}{1!}\frac{s}{a}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\frac{s}{a})^2-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(\frac{s}{a})^3+\cdots)$$

Если α — целое неотрицательное число, то ряд обрывается и вопроса об асимптотике не возникает. В противном случае мы можем применить предыдущую лемму:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{\alpha-n}{n+1} = \frac{1}{a}\frac{n-\alpha}{n+1}$$

Поэтому $a_n \sim \text{const} \cdot a^{-n} \cdot n^{-\alpha-1}$. Например, коэффициенты разложения $-(1-4s)^{1/2}$ ведут себя как $\text{const} \cdot 4^n \cdot n^{-3/2}$. Тем самым мы получаем повторный вывод асимптотики для чисел Каталана.

Доказательство леммы. Утверждение леммы эквивалентно тому, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/(A^n n^{\alpha_1-\beta_1})$, который можно, прологарифмировав, представить в виде

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n - n\ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\ln n$$

Для доказательства существования предела применим критерий Коши, т.е. будем доказывать, что рассматриваемая последовательность фундаментальна. Формально это означает:

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad : \forall n > N \quad \forall m > 0 \mid \ln a_{n+m} - \ln n - \\ &(n+m)\ln A + n\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\ln(n+m) + (\alpha_1-\beta_1)\ln n \mid < \epsilon\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad : \forall n > N \quad \forall m > 0 \\ &\mid \ln a_{n+m} - \ln n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)(\ln(n+m) - \ln n) \mid < \epsilon\end{aligned} \tag{5.5}$$

Рассмотрим отношение a_{n+1}/a_n:

$$a_{n+1}/a_n = A\frac{1+\alpha_1 n^{-1} + \cdots + \alpha_k n^{-k}}{1+\beta_1 n^{-1} + \cdots + \beta_k n^{-k}} = Af(1/n)$$

Логарифмируем:

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln A + \ln f(1/n)$$

Посмотрим на $\ln f(x)$. Вначале выпишем разложение $f(x)$ в ряд в окрестности точки 0:

$$f(x) = 1 + (\alpha_1 - \beta_1)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

Поэтому $\mid \ln f(x) - (\alpha_1-\beta_1)x \mid < Cx^2$, т.е.

$$\begin{array}{rcl}\mid \ln a_{n+1} - \ln a_n - \ln A - (\alpha_1-\beta_1)\frac{1}{n} \mid & < & C\frac{1}{n^2} \\ \mid \ln a_{n+2} - \ln a_{n+1} - \ln A - (\alpha_1-\beta_1)\frac{1}{n+1} \mid & < & C\frac{1}{(n+1)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mid \ln a_{n+m} - \ln a_{n+m-1} - \ln A - (\alpha_1-\beta_1)\frac{1}{n+m-1} \mid & < & C\frac{1}{(n+m-1)^2}\end{array} \tag{5.6}$$

Нас интересует разность (5.5):

$$
\begin{aligned}
&|\ln a_{n+m} - \ln n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)(\ln(n+m)-\ln n)\ |= \\
&|\ln a_{n+m} - \ln n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i} + \\
&+(\alpha_1-\beta_1)\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i} - (\alpha_1-\beta_1)(\ln(n+m)-\ln n)\ |\leq \qquad (5.7)\\
&|\ln a_{n+m} - \ln n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i}\ | + \\
&|\ (\alpha_1-\beta_1)(\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i} - -\ln(n+m)+\ln n)\ |
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Первое слагаемое в (5.7) оценим с помощью выписанной выше системы неравенств (5.6). Получим:

$$
|\ln a_{n+m} - \ln n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i}\ |\leq C\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{(n+i)^2} \tag{5.9}
$$

Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}$ сходится, то величина, записанная справа в (5.9), при достаточно больших n меньше ϵ.

Оценим второе слагаемое в (5.7) . Для этого заметим, что стоящая в нем сумма есть площадь под графиком ступенчатой функции $1/\lceil x\rceil$ на отрезке $[n, n+m+1]$. Она больше, чем площадь под графиком функции $1/x$, но меньше, чем площадь под графиком $1/x-1$. Значит разность, стоящая под модулем во втором слагаемом в (5.7) (разность площадей $1/x$ и $1/x-1$) не превосходит значения функции в самой левой точке рассматриваемого отрезка. Таким образом

$$
|\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{n+i} - \ln(n+m) + \ln n\ |< 1/n
$$

Это и завершает доказательство леммы. $\triangleright$

Задачи

1. (ПС, 8.1.24) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые множители числа n. Тогда число чисел, меньших n и взаимно простых с ним, — $\varphi(n)$ — равно

$$
\varphi(n) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_k).
$$

2. (ПС, 8.1.60) Число различных правильных замкнутых n-угольников равно $\varphi(n)/2$.

3. (ПС, 8.1.63) Сколько несократимых дробей имеется среди n^2 дробей

$$\begin{array}{lllll} 1/1, & 1/2, & 1/3, & \ldots, & 1/n \\ 2/1, & 2/2, & 2/3, & \ldots, & 2/n \\ 3/1, & 3/2, & 3/3, & \ldots, & 3/n \\ \ldots & & & & \\ n/1, & n/2, & n/3, & \ldots, & n/n\ ? \end{array}$$

4. Найти асимптотику коэффициентов:

   а) $(x-a)^{\alpha}\log(x-a)$

   б) $Cat^2(x)$

   в) числа разбиений.

ЛЕКЦИЯ 6. Производящие функции нескольких переменных.

Производящие функции от двух переменных пересчитывают последовательности, индексированные двумя целочисленными переменными. Удобно записывать такие последовательности в виде треугольника (соответствующего целочисленной решетке на положительном квадранте).

В качестве первого примера рассмотрим

6.1. Треугольник Паскаля.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \swarrow & 1 & \searrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}
$$

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, соответствуют числу путей, которые ведут из самой верхней вершины в данную в направлениях, указанных стрелками.

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Пусть n — строка треугольника Паскаля, k — номер элемента в строке. Тогда получим:

$$\sum_{n,k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right)y^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}$$

Второй способ соответствует нумерации вдоль стрелок, показанных на треугольнике Паскаля. Для него имеем:

$$
\begin{aligned}
c_{n,m} &= \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n} \\
\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m}x^n y^m &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\binom{n+m}{n}x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n+m=k}\binom{n+m}{n}x^n y^m = \\
= \sum_{k=0}^{\infty}(x+y)^k &= \frac{1}{1-x-y}
\end{aligned}
$$

И, наконец, имеется третий способ: сопоставить треугольнику Паскаля экспоненциальную производящую функцию. Экспоненциальная производящая функция отличается от обычной тем, что в качестве коэффициентов степенного ряда берутся не элементы последовательности a_n, а $\frac{a_n}{n!}$.

6.2. Экспоненциальные производящие функции.

Зная экспоненциальную производящую функцию, мы также можем восстановить последовательность a_n, как, впрочем, и в более общем случае, когда фиксируется некоторая последовательность b_n, и любой другой последовательности сопоставляется ряд $a_n b_n$. Таким образом, имеем соответствия:

$$
\begin{array}{lll}
\{a_n\} \leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & \text{— простая производящая функция} \\
\{a_n\} \leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n & \text{— экспоненциальная} \\
\{a_n\} \leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n & \text{— соответствующая } \{b_n\}
\end{array}
$$

Но производящие функции, отличные от простых или экспоненциальных, встречаются довольно редко. Чем отличаются экспоненциальные производящие функции от простых? Посмотрим, как преобразуются последовательности при операциях над экспоненциальными производящими функциями. Сумма ведет себя так же:

$$\sum \frac{a_n}{n!}x^n \quad + \quad \sum \frac{b_n}{n!}x^n = \sum \frac{(a_n + b_n)}{n!}x^n$$

А произведение иначе:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots)(\frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!}x + \frac{b_2}{2!}x^2 + \ldots) = \\
= \quad &\frac{a_0}{0!}\frac{b_0}{0!} + (\frac{a_0}{0!}\frac{b_1}{1!} + \frac{a_1}{1!}\frac{b_0}{0!})x + (\frac{a_0}{0!}\frac{b_2}{2!} + \frac{a_1}{1!}\frac{b_1}{1!} + \frac{a_2}{2!}\frac{b_0}{0!})x^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Коэффициенты произведения вычисляются по формуле:

$$c_n = a_n b_0 \binom{n}{0} + a_{n-1} b_1 \binom{n}{1} + \ldots + a_0 b_n \binom{n}{n}$$

Имеется также отличие при взятии производной. Дифференцирование экспоненциальной производящей функции приводит только к сдвигу коэффициентов последовательности, не меняя их величины.

$$(\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots)' = a_1 + \frac{a_2}{1!}x + \frac{a_3}{2!}x^2 + \ldots$$

6.3. Экспоненциальная производящая функция для треугольника Паскаля.

Используем нумерацию, указанную на треугольнике Паскаля стрелками:

$$\sum \frac{1}{(n+m)!}\binom{n+m}{n} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n+m=k} \binom{n+m}{n} x^n y^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k = e^{x+y}$$

6.4. Треугольник Бернулли-Эйлера.

Этот треугольник обладает, как и треугольник Паскаля, многими замечательными свойствами. Представим два способа записывать его:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & & \\
 & 16 & & 16 & & 14 & & 10 & & 5 & & 0 & \\
0 & & 16 & & 32 & & 46 & & 56 & & 61 & & 61 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}$$

Левая сторона треугольника Бернулли-Эйлера называется стороной Бернулли, правая — стороной Эйлера.

Числа в треугольнике Бернулли-Эйлера также означают число путей из верхней вершины в данную. Но рассматриваются при этом пути, идущие зигзагом: нечетные шаги влево, четные — вправо. Поэтому каждое число в треугольнике Бернулли-Эйлера равно сумме стоящих перед ним чисел в предыдущей строке, считая слева направо в нечетных строках, и справа налево в четных.

Можно дать и более простое индуктивное правило определения чисел в треугольнике Бернулли-Эйлера, если чередовать знаки через каждые две строчки:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & -1 & & -1 & & & & \\
 & & & -2 & & -2 & & -1 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & & \\
 & 16 & & 16 & & 14 & & 10 & & 5 & & 0 & \\
0 & & -16 & & -32 & & -46 & & -56 & & -61 & & -61 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}$$

Каждый элемент равен сумме стоящих справа и справа сверху, как показано на схеме. При этом нужно как-то доопределить сторону Эйлера.

6.5. Еще одна интерпретация треугольника Бернулли-Эйлера: морсовские многочлены и up-down перестановки.

Начнем с функций. Будем рассматривать многочлены $p(x) = x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_{n+1}$ и их *критические* точки. Точка x_0 — критическая, если $p'(x_0) = 0$.

Имеется, вообще говоря, n критических точек.

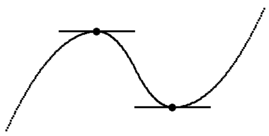
Определение. *Многочлен называется* морсовским*, если*

1. *все его критические точки различны и вещественны;*

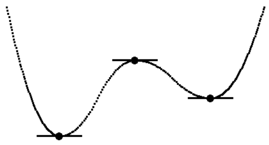
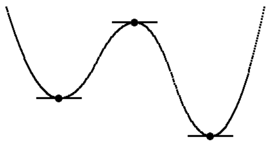
2. *все его критические значения различны.*

Приведем примеры при малых значениях n:

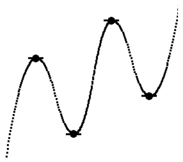
При **n=1** и **n=2** имеется ровно 1 возможность

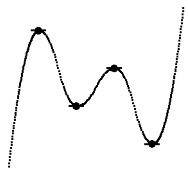



n=3. Имеются две возможности

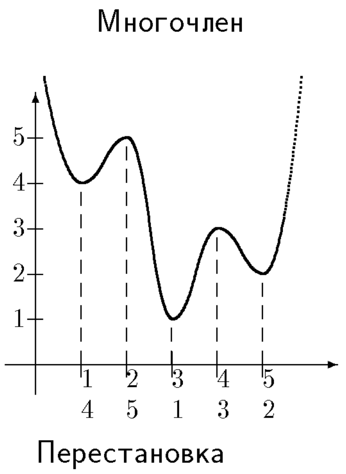



n=4. Имеется пять возможностей

Можно заметить, что получаемые числа соответствуют ненулевым числам на боковых сторонах треугольника Бернулли-Эйлера, левая сторона соответствует нечетным значениям n, правая — четным.



Каждому морсовскому многочлену можно сопоставить перестановку. Для этого перенумеруем критические точки и критические значения в порядке возрастания. После этого перестановка определяется так: на i-ом месте стоит номер критического значения в i-й критической точке.

Ясно, что каждый элемент такой перестановки либо больше обоих своих соседей, либо меньше, а последний элемент всегда меньше предпоследнего. Такие перестановки называются *пилообразными* или *up-down перестановками.*

Упражнение 6.1. *Докажите, что приведенное соответствие взаимнооднозначно.*

Чтобы понять, откуда берется связь с треугольником Бернулли-Эйлера, рассмотрим типы морсовских многочленов, у которых первое критическое значение имеет номер k.

Утверждение. *Пусть $c_{n,k}$ — число типов морсовских многочленов степени $n+1$, у которых 1-е критическое значение является k-м по величине. Тогда $c_{n,k}$ есть k-е число в n-й строке треугольника Бернулли-Эйлера.*

Доказательство. Для первых двух строк треугольника утверждение проверяется непосредственно. Докажем, что если оно верно для n-й строки, то оно верно и для строки с номером $n+1$. Пусть для определенности $n+1$ четно. Тогда n и $n+2$ нечетны; мы рассматриваем многочлены степени $n+2$. Первое критическое значение в таком многочлене является максимумом, второе — минимумом; поэтому второе критическое значение меньше 1-го.

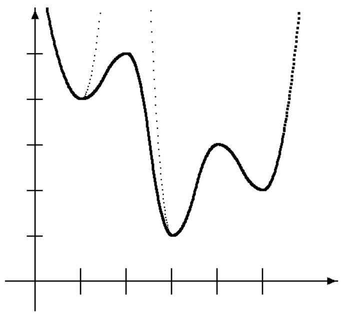
Отбросив первое критическое значение, мы получаем многочлен степени $n+1$ однозначно определенного морсовского типа, у которого 1-е критическое значение может быть k-м, $k+1$, ..., n-м по величине. Наоборот, по каждому многочлену степени $n+1$, у которого 1-е критическое значение является l-м по величине ($l \geq k$), мы можем единственным образом построить многочлен степени $n+2$, у которого 1-е критическое значение является k-м. Таким образом,

$$c_{n+1,k} = \sum_{l \geq k} c_{n,l}$$

Для строки с нечетным номером справедливо аналогичное рассуждение. Таким образом, числа удовлетворяют тем же соотношениям, что и элементы треугольника Бернулли-Эйлера, а значит, именно они и стоят в треугольнике.

6.6. Вывод производящих функций для сторон Бернулли и Эйлера.

Выведем рекуррентную формулу для числа up-down перестановок (типов многочленов). Для этого возьмем самый высокий максимум многочлена и унесем его в бесконечность.



Получим два многочлена, причем если изначально имелась $n+1$ критическая точка, то получаются многочлены с k и $n-k$ критическими точками, $n-k$ — нечетно.

Необходимо рассмотреть по отдельности случаи, когда n нечетно (обозначаем число up-down перестановок как p_n, а экспоненциальную производящую функцию — $P(x)$), и когда n — четно (обозначим число up-down перестановок e_n, а экспоненциальную производящую функцию — $E(x)$). Для чисел p_n получаем рекуррентное соотношение

$$p_{n+1} = \sum_{k \text{ — нечетно}} \binom{n}{k} p_k p_{n-k} \tag{6.1}$$

Биномиальный коэффициент возникает из-за того, что мы должны перемешать множества критических значений левого и правого многочленов.

Вспоминая, что для экспоненциальных производящих функций правая часть соответствует квадрату производящей функции $P(x)$, а левая — ее же производной, получаем уравнение для производящей функции:

$$P'(x) = P^2(x) + 1 \tag{6.2}$$

Уравнение (6.2) — с разделяющимися переменными. Решив его, получаем:

$$\begin{aligned} dP &= dx(P^2+1) \\ \int \frac{dP}{P^2+1} &= \int dx \\ \operatorname{arctg} P &= x + C \\ P &= \operatorname{tg}(x+C) \end{aligned}$$

Таким образом, сторона Бернулли треугольника Бернулли-Эйлера определяет разложение в ряд тангенса:

$$\operatorname{tg} x = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Если же n — четно, получаем такое рекуррентное соотношение:

$$e_{n+1} = \sum_{k \text{ — нечетно}} \binom{n}{k} e_k p_{n-k} \tag{6.3}$$

которому соответствует уравнение в производящих функциях

$$E'(x) = E(x)P(x) \tag{6.4}$$

Решая его, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E'(x)}{E(x)} &= P(x) \\ (\ln E(x))' &= P(x) = \operatorname{tg} x \\ \ln E(x) &= \int \operatorname{tg} x dx \\ E(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Задачи

1. Найти экспоненциальную производящую функцию для треугольника Бернулли-Эйлера

$$\sum be_{n,m}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} = BE(x,y)$$

2. Найти производящую функцию для числа путей до точки n за m шагов по правой полупрямой.

3. Рассмотрим, как это уже было, несамопересекающиеся пути по целочисленной решетке на плоскости, когда разрешены шаги в трех направлениях: налево, направо и вверх. Найти производящую функцию для числа таких путей из точки $(0,0)$ в точку (n,m) за k шагов в положительном квадранте.

4. Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$h(z) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 z^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 z^3 + \dots$$

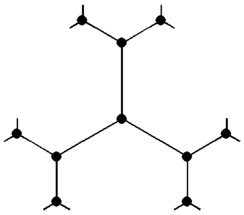
   а) найти асимптотику коэффициентов;

   б) доказать, что

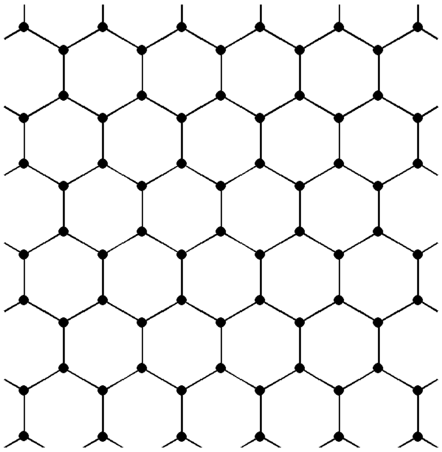
$$z(1-z)h''(z) + (1-2z)h'(z) - \frac{1}{4}h(z) = 0$$

5. Найти производящие функции для числа путей длины k из некоторой фиксированной точки в некоторую другую, отстоящую от нее на расстояние m для следующих бесконечных графов

   а) однородное дерево порядка 3:



   б) гексагональная решетка:



ЛЕКЦИЯ 7. Графы и хроматические функции

7.1. Раскраски графов.

Ближайшие несколько лекций будут посвящены некоторым геометрическим аспектам комбинаторики, в том числе наиболее активно развивающимся в последние годы.

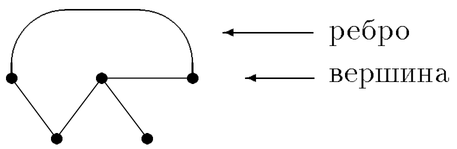
Одна из самых старых и наиболее привлекательных задач в этой области — это проблема четырех красок.

Задача. *Доказать, что всякий планарный граф 4-раскрашиваем.*

Для понимания формулировки этой задачи нам понадобятся некоторые усилия.

Определение. Графом *будем называть тройку* $\Gamma = \{V, E, I\}$, *состоящую из конечного множества вершин* V, *конечного множества ребер* E *и отображения инцидентности* $I : E \to V \times V$, *сопоставляющего каждому ребру пару вершин, которую это ребро соединяет.*

Граф обычно изображается на плоскости; вершинам графа соответствуют точки на плоскости, ребрам — отрезки дуг, соединяющие эти точки:



Комментарии к определению.

1. На самом деле естественно считать графом не определенный выше объект, а класс эквивалентности таких объектов. Две тройки $\Gamma_1 = \{V_1, E_1, I_1\}$ и $\Gamma_2 = \{V_2, E_2, I_2\}$ называются *эквивалентными*, если существуют взаимно-однозначные отображения $v : V_1 \to V_2$ и $e : E_1 \to E_2$, такие что $I_2 \circ e = (v \times v) \circ I_1$.

2. У приведенного определения имеются варианты. Например, иногда естественно требовать, чтобы отображение I было инъективным, т.е. чтобы через каждую пару вершин проходило не более

одного ребра. Иногда запрещаются петли — ребра, соединяющие вершину с самой собой и т.д. Мы будем всякий раз оговаривать эти ограничения.

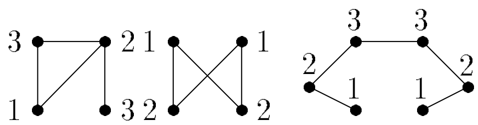
3. С топологической точки зрения граф является "одномерным комплексом". Если на ребре ввести ориентацию, то "граница ребра" — это разность начальной и конечной вершин.

Определение. *Две вершины графа называются соседними, если существует ребро, которое их соединяет. Граф называется связным, если для любой пары* u, v *его вершин существует последовательность* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *вершин графа, такая что вершины* v_i *и* v_{i+1} *соседние для всех* $i = 1, \ldots, k-1$ *и* $v_1 = u, v_k = v$.

Всякий граф можно единственным образом разбить на связные компоненты — максимальные связные подграфы, которые в нем содержатся.

Определение. Правильной раскраской *графа в* q *цветов называется такое отображение* $c : V \to Q$ *множества вершин графа в множество* $Q = \{1, \ldots, q\}$ *из* q *элементов, что любые две соседние вершины покрашены в различные цвета (т.е. для любых двух соседних вершин* v_1, v_2 *и* $c(v_1) \neq c(v_2)$*).*

Вот несколько правильно раскрашенных графов, среди которых имеется граф с неправильной раскраской. Найдите его:



Замечание. Граф, содержащий петлю, не может быть правильно раскрашен: по крайней мере одна вершина в нем является соседней самой себе, поэтому она должна быть покрашена в разные цвета, что невозможно. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением графов без петель.

7.2. Хроматическая функция.

Обозначим через $f_\Gamma(q)$ число способов правильной раскраски графа Γ в q цветов. Функцию f_Γ будем называть *хроматической функцией* графа Γ.

Пример. *Пусть граф* Γ *состоит из* n *вершин, а множество его ребер пусто. Тогда его хроматическая функция, очевидно,*

$$f_\Gamma(q) = q^n$$

Замечание. При подсчете хроматической функции графа число ребер, соединяющих данную пару вершин, несущественно. Важно лишь, соединены данные две вершины хотя бы одним ребром, или нет. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением графов, в которых любые две вершины соединены не более, чем одним ребром.

Пример. *Сосчитаем хроматическую функцию графа* A_2

A_2

Левую вершину можно покрасить в q цветов. После этого правую — в $q-1$ цвет. Поэтому $f_{A_2}(q) = q(q-1)$.

Предложение. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \Gamma_k$ *— разбиение графа* Γ *на связные компоненты. Тогда*

$$f_\Gamma = f_{\Gamma_1} \cdot \ldots \cdot f_{\Gamma_k} \ .$$

Доказательство. Так как различные раскраски связных компонент графа никак не связаны между собой, то любому набору таких раскрасок соответствует раскраска графа и наоборот.

Сосчитаем хроматическую функцию еще для нескольких примеров. Благодаря предыдущему предложению мы можем ограничиться лишь связными графами.

Пример. *Полный граф* K_n *— это граф из* n *вершин, в котором любая пара вершин соединена между собой ребром. Его хроматическая функция, очевидно*

$$f_{K_n}(q) = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)$$

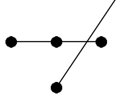
Пример. *Граф* A_n*:*

n *вершин*

A_n

Первую вершину в нем можно покрасить в любой из q цветов, вторую — в любой из оставшихся $q-1$ цветов, третью — в любой из $q-1$ цветов, отличных от цвета второй вершины и т.д. Поэтому его хроматическая функция $f_{A_n}(q) = q(q-1)^{n-1}$.

Пример. *Граф D_4:*



D_4

Центральную вершину в этом графе можно покрасить в один из q цветов, после чего каждую из оставшихся вершин можно покрасить в один из $q-1$ цветов. Поэтому $F_{D_4} = q(q-1)^3$.

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема. *Пусть граф T_n — это дерево (связный граф без циклов) с n вершинами. Тогда его хроматическая функция равна $q(q-1)^{n-1}$.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ теорема верна — хроматическая функция такого графа равна q.

Пусть теперь утверждение теоремы верно для любого дерева с n вершинами. Рассмотрим произвольное дерево с $n+1$ вершиной. Выкинем из него произвольный лист (вершину, из которой выходит ровно одно ребро). Хроматическая функция для оставшегося дерева по предположению индукции равна $q(q-1)^{n-1}$, а выкинутую вершину можно раскрасить в один из $q-1$ цветов. Поэтому хроматическая функция для графа T_n равна $q(q-1)^n$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь более сложный пример.

Пример. *Пусть граф C_n — цикл с n вершинами.*

Граф C_3 совпадает с полным графом K_3, хроматическую функцию для которого мы знаем: $f_{K_3}(q) = q(q-1)(q-2)$. Рассмотрим граф C_4. Выкинем из этого графа произвольное ребро AB, получим граф A_4. Число правильных раскрасок графа C_4 равно числу правильных раскрасок графа A_4 минус число правильных раскрасок графа A_4, в которых вершины A и B окрашены в один и тот же цвет. Но это означает, что вершины A и B мы можем “склеить” и получить правильную раскраску “склеенного” графа C_3. Тем самым, мы получили формулу

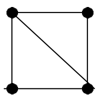
$$f_{C_4} = f_{A_4} - f_{C_3} = q(q-1)^3 - q(q-1)(q-2) = q(q-1)(q^2-3q+3).$$

Аналогичное рассуждение применимо для произвольного цикла с n вершинами, и мы получаем рекуррентную формулу

$$f_{C_{n+1}} = f_{A_{n+1}} - f_{C_n}$$

Задача. Найдите производящую функцию $C(q,s) = \sum_n f_{C_n}(q)s^n$ для числа раскрасок циклов с n вершинами.

Упражнение 7.1. *Найдите хроматическую функцию для триангуляции квадрата:*



T_4

7.3. Теорема о хроматическом многочлене.

Все вычисленные нами до сих пор хроматические функции представляли собой многочлены, причем степени этих многочленов равнялись числу вершин в графе. Это наблюдение позволяет нам сформулировать гипотезу, которая становится теоремой.

Теорема. *Хроматическая функция любого графа Γ с n вершинами является многочленом степени n.*

Доказательство. Повторим рассуждение, использованное нами при вычислении хроматической функции для цикла. Для его формализации проведем индукцию по числу ребер в графе. Мы не будем предполагать связности графа.

Если число ребер равно 0, то утверждение теоремы верно.

Пусть теперь утверждение теоремы верно для любого графа с m ребрами. Докажем, что оно верно для произвольного графа с $m+1$ ребром. Рассмотрим произвольное ребро AB этого графа. Обозначим через Γ' граф, полученный выкидыванием из графа Γ ребра AB, а через $\tilde{\Gamma}$ — граф, полученный склеиванием вершин A и B. Тогда $f_\Gamma = f_{\Gamma'} - f_{\tilde{\Gamma}}$. По предположению индукции $f_{\Gamma'}$ — многочлен степени n, а $f_{\tilde{\Gamma}}$ — многочлен степени $n-1$, поэтому их разность есть многочлен степени n.

Так как хроматическая функция любого графа является многочленом, мы будем называть ее *хроматическим многочленом* графа.

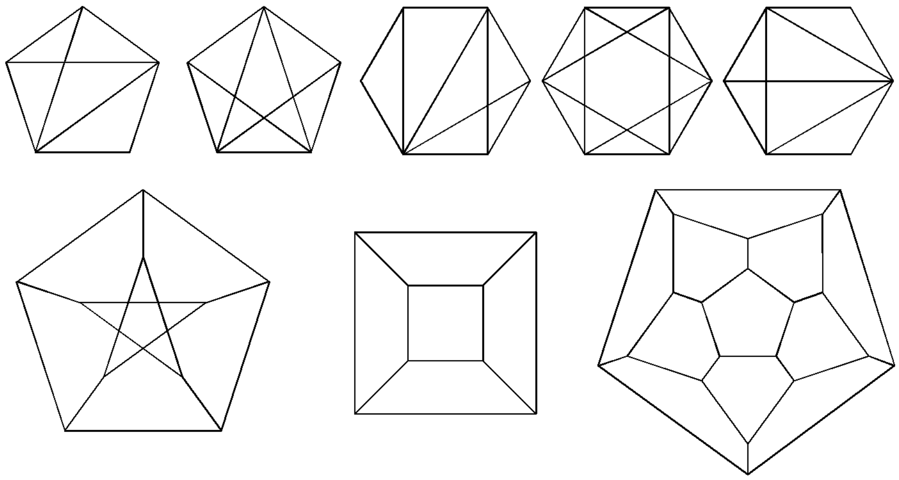
Доказательство теоремы снабжает нас алгоритмом для вычисления хроматического многочлена произвольного графа. Выкидывая поочередно ребра графа и производя склеивания, мы приходим к графу, не содержащему ребер. Хроматический многочлен последнего мы знаем. Однако, этот алгоритм требует больших вычислительных ресурсов, так как каждый шаг приводит к замене одного графа двумя. Уже его применение к достаточно сложному графу порядка 15 требует значительного времени. Поэтому важно конструировать алгоритмы, применимые к некоторым классам графов. В ряде случаев (как это было выше) удается получить достаточно простые формулы.

Задача. Докажите, что хроматический многочлен для графа триангуляции n-угольника не зависит от выбора триангуляции. Найдите этот многочлен.

Определение. Хроматическим числом *графа* Γ *называется минимальное число* q*, такое что граф допускает правильную раскраску в* q *цветов.*

Конечно, хроматическое число графа однозначно определяется его хроматическим многочленом: это такое минимальное натуральное число q, что $f_\Gamma(q) \neq 0$. Несмотря на то, что хроматический многочлен помимо значения хроматического числа несет еще массу дополнительной информации, не видно более простого способа вычисления хроматического числа в общем случае.

Упражнение 7.2. *Найдите хроматическое число и хроматический многочлен для следующих графов:*

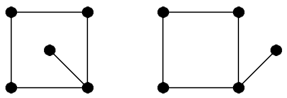


7.4. Планарные и плоские графы.

Важную роль в изучении графов играют их вложения в плоскость.

Определение. Вложением *графа в плоскость называется такое изображение графа на плоскости, при котором никакие два ребра не пересекаются в точке, отличной от вершины графа. Два вложения графа являются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм плоскости, осуществляющий автоморфизм графа. Граф называется* планарным, *если существует его вложение в плоскость.*

Один и тот же планарный граф может иметь различные вложения в плоскость:



Определение. Плоским графом *называется пара* (Γ, i), *состоящая из графа* Γ *и его вложения в плоскость* i.

Теперь даны все необходимые для понимания условия задачи о четырех красках определения. Теорема о четырех красках занимает в математике промежуточное положение между гипотезой и доказанной теоремой. Текст, содержащий доказательство этой теоремы, опирается на обширные материалы компьютерных вычислений и трудно проверяем.

Даже если он и верен, проблема создания простого доказательства попрежнему актуальна. Возможно такое доказательство можно получить, опираясь на следующую теорему Уитни.

Рассмотрим две триангуляции правильного n-угольника. *Графом двойной триангуляции* будем называть граф, полученный наложением этих двух триангуляций друг на друга. Например, таковы графы верхнего ряда на рисунке к предыдущей задаче.

Упражнение 7.3. *Убедитесь, что граф двойной триангуляции — планарный.*

Теорема. *(Уитни). Гипотеза о четырех красках верна, если она верна для любого графа двойной триангуляции.*

Задача. *Придумайте эффективный алгоритм подсчета хроматического многочлена для графов двойной триангуляции.*

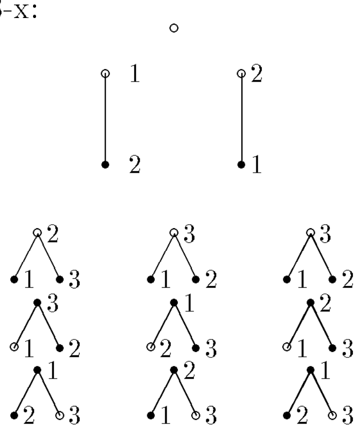
ЛЕКЦИЯ 8. Перечисление деревьев.

8.1. Корневые и отмеченные деревья.

Определение. Валентностью *вершины в графе называется число выходящих из нее ребер.*

Определение. Помеченным деревом из n вершин *называется дерево, в котором каждой вершине сопоставлено одно из чисел $\{1, \ldots, n\}$, причем разным вершинам сопоставлены различные числа. Дерево называется* корневым, *если в нем выделена одна из вершин, называемая корнем дерева.*

Вот список всех помеченных корневых деревьев с числом вершин от 1 до 3-х:



2

9

Наша ближайшая задача — написать экспоненциальную производящую функцию $T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n$ для числа T_n корневых помеченных деревьев из n вершин.

Обозначение. Пусть $f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n s^n$ — производящая функция (мы допускаем и отрицательные степени переменной s). Будем обозначать коэффициент при n-й степени переменной s через $[s^n]f(s)$, т.е. $f_n = [s^n]f(s)$.

Коэффициент $f_{-1} = [s^{-1}]f(s)$ называется *вычетом* функции f.

Для решения этой задачи выкинем из дерева корень. Тогда оно распадется на несколько деревьев. Если исходное дерево было помеченным, то новые деревья тоже можно считать помеченными: требуется лишь заменить пометки $\{l_1, \ldots, l_i\}$ на числа $\{1, \ldots, i\}$, сохраняя их относительный порядок. Корнем нового дерева будем считать вершину, соединенную с корнем исходного дерева. Тем самым каждому корневому помеченному дереву с корнем валентности k сопоставлено (мульти)множество из k корневых помеченных деревьев. Мы говорим о мультимножествах, так как среди вновь образованных деревьев могут встречаться одинаковые.

Так как каждому дереву с корнем валентности k мы сопоставили мультимножество из k деревьев, это означает, что такие деревья перечисляются производящей функцией $sT^k(s)$. Действительно, вклад в коэффициент при s^{n+1} в $sT^k(s)$ дают в точности элементы вида

$$\frac{T^{l_1}}{l_1!} \cdots \frac{T^{l_k}}{l_k!} s^{l_1 + \ldots + l_k},$$

для которых $l_1 + \ldots + l_k = n$. Множество пометок n вершин k деревьев можно разбить на k подмножеств из $l_1, \ldots, l_k$ элементов $\frac{n!}{l_1! \ldots l_k!}$ способами. Поэтому число помеченных корневых деревьев из $n+1$ вершины с корнем валентности k равно

$$n![s^{n+1}]T^k(s)$$

Складывая предыдущие равенства для всех k, мы получаем следующее утверждение.

Теорема. *Экспоненциальная производящая функция $T(s)$ для числа помеченных корневых деревьев, перечисляющая их по числу вершин, удовлетворяет уравнению Лагранжа*

$$T(s) = se^{T(s)}.$$

8.2. Уточнение теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа теперь позволяет нам легко вычислить коэффициенты функции $T(s)$, однако не дает явной формулы для них. Для получения явной формулы нам понадобится следующее уточнение теоремы Лагранжа.

Теорема. *Пусть функции $\omega = \omega(t)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$ удовлетворяют уравнению Лагранжа*

$$\omega(t) = t\varphi(\omega(t)).$$

Тогда коэффициент при t^n в функции ω равен

$$[t^n]\omega(t) = \frac{1}{n}[\omega^{n-1}]\varphi^n(\omega)$$

Применим это уточнение к уравнению на функцию $T(s)$. Имеем

$$T_n = n![t^n]T(s) = n!\frac{1}{n}[\omega^{n-1}]e^{n\omega} = (n-1)!\frac{n^{n-1}}{n!} = n^{n-1}.$$

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема. *(Кэли). Число помеченных корневых деревьев с n вершинами равно $T_n = n^{n-1}$.*

Следствие 2. *Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2}.*

Действительно, в каждом помеченном дереве корень можно выбрать n способами, и все эти способы различны.

Доказательство уточнения теоремы Лагранжа.

Лемма. *(преобразование вычета при замене переменной). Пусть функция $g(t)$ такова, что $g(0) = 0, g'(0) \neq 0$. Тогда*

$$[s^{-1}]f(s) = [t^{-1}]f(g(t))g'(t).$$

Доказательство. Пусть $f(s) = \sum_{i=-N}^{\infty} f_n s^n$, $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n t^n$.
При $n \neq -1$

$$[t^{-1}]g^n(t)g'(t) = [t^{-1}]\frac{1}{n+1}(g^{(n+1)(t)})' = 0,$$

так как вычет производной любой функции равен нулю. При $n = -1$

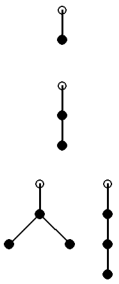
$$[t^{-1}]g^{-1}(t)g'(t) = 1.$$

Подсчитаем теперь коэффициент $[t^n]\omega$ в производящей функции ω.

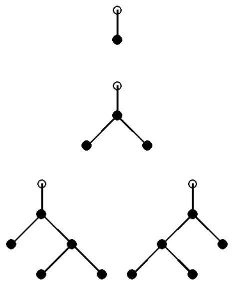
$$\begin{aligned}
[t^n]\omega &= [t^{-1}]t^{-(n+1)}\omega(t) = [t^{-1}]\left(\frac{\omega}{\varphi(\omega)}\right)^{-(n+1)}\omega = \\
&= [t^{-1}]\frac{\varphi^{n+1}(\omega)}{\omega^n} = [\omega^{-1}]\frac{\varphi^{n+1}(\omega)}{\omega^n}\cdot\frac{\varphi(\omega)-\omega\varphi'(\omega)}{\varphi^2(\omega)} = \\
&= [\omega^{-1}]\left(\frac{\varphi^n(\omega)}{\omega^n} - \frac{\varphi^{n-1}(\omega)\varphi'(\omega)}{\omega^{n-1}}\right) = \\
&= [\omega^{n-1}]\varphi^n(\omega) - \frac{1}{n}[\omega^{n-1}]\left(\varphi^n(\omega)\right)' = \frac{1}{n}[\omega^{n-1}]\varphi^n(\omega)
\end{aligned}$$

Плоские деревья

Бинарным деревом называется дерево, у которого валентности всех вершин равны 1 или 3. Рассмотрим плоские деревья с *висячим* (валентности 1) корнем и бинарные плоские деревья с висячим корнем. Вот возможные их типы при небольшом числе вершин:



	количество		
число вершин	плоских корневых	плоских бинарных	число вершин
2	1	1	2
3	1	1	4
4	2	2	6
5	5	5	8



. . .

Задачи.

1. Перечислить плоские деревья с висячим корнем.

2. Перечислить плоские бинарные деревья с висячим корнем.

3. Можно ли установить (1-1)-соответствие между этими типами деревьев?

4. Придумайте способ перечисления корневых деревьев (непомеченных).

5. Перечислить корневые помеченные леса (Каждая связная компонента *леса* — дерево).

ЛЕКЦИЯ 9. Вложенные графы

9.1. Вложение графа в поверхность.

На предыдущих лекциях мы рассмотрели планарные графы и плоские графы. Планарные графы — это графы, допускающие вложение в плоскость; а плоские графы — это графы уже вложенные в плоскость. Мы видели, что один и тот же планарный граф можно по разному вкладывать в плоскость — при этом получаются неизоморфные плоские графы.

Открытым остается вопрос — что делать с графами, которые нельзя вложить в плоскость, т.е. с непланарными графами. В лекции будет построена конструкция, позволяющая вложить любой граф с некоторой дополнительной структурой в двумерную ориентированную поверхность.

Под *графом* в настоящей лекции понимается граф, содержащий, возможно, петли — ребра, два конца которых совпадают, и кратные ребра — т.е. две вершины могут быть соединены несколькими различными ребрами.

Из курса топологии вам известна классификация двумерных ориентируемых поверхностей:

Теорема. *Всякая замкнутая двумерная ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено некоторое конечное число ручек.*

Рассмотрим граф Γ. Пусть M — замкнутая ориентируемая двумерная поверхность.

Определение. Вложением *графа Γ в поверхность M называется такое изображение графа на поверхности, что*

1) каждой вершине Γ сопоставлена одна и только одна точка поверхности M;

2) каждому ребру $e_k \in E(\Gamma)$ сопоставлено непрерывное отображение $\varepsilon_k : [0,1] \to M$, причем если ребро e_k соединяет вершины v_i и v_j, то концы отрезка $[0,1]$ переходят в образы вершин v_i и v_j соответственно, и для различных e_k, e_l образы интервалов $\varepsilon_k((0,1))$ и $\varepsilon_l((0,1))$ не пересекаются;

3) дополнение M к образу графа Γ на поверхности представляет собой несвязное объединение клеток: двумерных областей, гомеоморфных кругу.

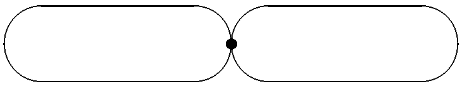
Требования 1) и 2) определения вложения графа в поверхность совпадают с требованиями определения вложения графа в плоскость. Требование 3) является новым. Оно призвано исключить такие отображения графа в поверхность, при которых дополнение к нему имеет ручки (или несвязную границу):

Дополнение к Γ_1 — цилиндр, к Γ_2 — имеет ручку.

Мы хотим, чтобы граф разрезал все ручки поверхности. На плоскости (или сфере) это требование оказывается пустым, так как у исходной поверхности ручек нет.

Вот примеры графов, вложенных в тор и крендель:

Уже из этих примеров видно, что один и тот же граф может быть вложен в различные поверхности. Так, граф



планарный, но может быть вложен и в тор, как показано выше.

Пусть граф Γ с B вершинами и P ребрами вложен в поверхность M. Обозначим через K число клеток в дополнении к графу Γ на этой поверхности. Тогда числа B, P и K связаны между собой теоремой Эйлера.

Теорема. *(Эйлер) $B - P + K = \chi_M = 2 - 2g$, где g — род поверхности M (число ручек в ней), а χ_M — ее эйлерова характеристика.*

Следствие. *Граф с B вершинами, P ребрами и не может быть вложен в поверхность, род которой больше $(P - B + 1)/2$.*

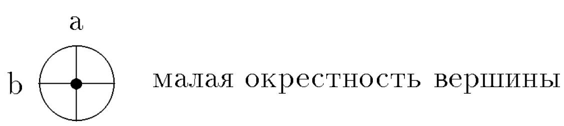
Действительно, так как род поверхности неотрицателен, то $g = (P - B - K + 2)/2 \leq (P - B + 1)/2$, т.к. $K \geq 1$.

9.2. Теорема о вложении.

Наша основная цель — показать, что любой граф можно вложить в некоторую поверхность.

Предположим, что граф Γ вложен в некоторую поверхность M. В дальнейшем мы будем отождествлять вершины и ребра графа Γ с их образами на поверхности M.

Пусть v — некоторая вершина графа Γ. Рассмотрим маленькую круговую окрестность этой вершины на поверхности и отобразим ее гомеоморфно на плоскость с сохранением ориентации:

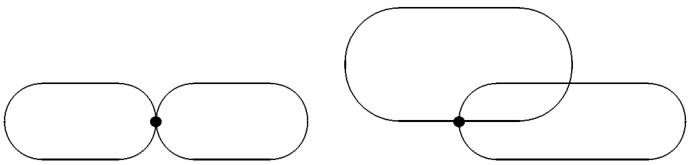


Образ этой окрестности это круг, в котором выделена вершина и некоторое конечное количество выходящих из нее "полуребер". Определим на множестве полуребер, выходящих из данной вершины, *циклический порядок* — мы скажем, что полуребро b непосредственно следует за полуребром a, если оно непосредственно следует за полуребром a при движении от него против часовой стрелки.

Таким образом, всякое вложение графа в двумерную поверхность определяет циклический порядок на каждом из множеств полуребер, выходящих из каждой из его вершин.

Определение. Графом с вращением *называется граф, для каждой вершины которого задан циклический порядок выходящих из нее полуребер.*

Пример. *Рассмотрим граф, состоящий из одной вершины и двух ребер — петель, оба конца которых совпадают с этой вершиной. Из вершины выходит четыре полуребра, и есть два существенно разных способа задать на них циклический порядок:*



Как мы видели, первый способ реализуется вложением графа в плоскость, а второй — его вложением в тор. *Вложением графа с вращениями* в поверхность естественно считать такие вложения, которые определяют тот же самый циклический порядок на полуребрах, что и в исходном графе.

Теорема. *Для всякого графа с вращениями существует единственная двумерная замкнутая ориентируемая поверхность, в которую он может быть вложен с сохранением вращений.*

Прежде, чем доказывать теорему, заметим, что само вложение графа может быть определено не однозначно. Два изображенных на рисунке вложения нельзя перевести одно в другое изотопией тора:

Задача. *Опишите все неэквивалентные вложения графа из предыдущего примера в тор.*

Доказательство теоремы. Изобразим вершины и выходящие из них полуребра графа Γ в виде набора "ежей" на плоскости. При этом циклический порядок полуребер в каждой вершине должен совпадать с порядком, определяемым ориентацией плоскости.

Соединим теперь концы полуребер так, чтобы получить требуемый граф Γ. Некоторые из ребер могут, конечно, пересечься. Однако мы потребуем, чтобы они не проходили через вершины. Расставим на ребрах графа Γ произвольным образом стрелки ("ориентируем" ребра) и обозначим каждое ребро некоторой буквой так, чтобы различные ребра были обозначены различными буквами:

По этим данным мы построим поверхность M, которая не будет зависеть ни от способа расстановки стрелок, ни от обозначения ребер графа буквами.

Построение поверхности M состоит из двух шагов. Сначала мы определим набор клеток, а затем склеим из этих клеток поверхность. Будем описывать построение набора клеток для примера, изображенного на рисунке. В общем случае построение полностью аналогично.

Клетки набора определяются так.

Рассмотрим ребро графа Γ, обозначенное буквой a. Двигаясь по направлению этого ребра, мы приходим в вершину 1. В вершине 1 у нас определен циклический порядок полуребер, и мы выходим из нее по тому полуребру, которое непосредственно следует за полуребром, по которому мы в нее пришли. То есть, мы выходим из вершины 1 по ребру f и приходим в вершину 3. Из вершины 3 мы должны выйти по следующему полуребру c, вдоль которого мы возвращаемся опять в вершину 3. На этот раз мы должны выйти из вершины 3 по ребру f, но в направлении, противоположном, указанному стрелкой. Мы будем обозначать движение по такому ребру буквой f^{-1}. На сей раз мы возвращаемся в вершину 1, из которой должны уйти по ребру d.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока наш путь не должен будет снова пройти *по тому же самому ребру и в том же самом направлении*, в котором мы уже проходили. Так как число ребер конечно, то он обязательно завершится.

Запишем путь, который мы прошли, обозначая каждое пройденное ребро соответствующей ему буквой. Получится слово $afcf^{-1}dbc^{-1}b^{-1}$. Мы видим, что путь "зациклился" — очередной шаг мы должны были бы сделать по ребру a. Докажем, что это общая ситуация:

первым повторившимся ребром является то, с которого мы начали путь.

Действительно, предположим, что это не так, и первым должно повториться ребро x, не совпадающее с первым ребром пути. Посмотрим на ребро, предшествующее x. Это ребро определено однозначно и, тем самым, оно должно было повториться раньше, чем x, что приводит к противоречию.

Итак, мы построили первую клетку, соответствующую циклу из ребер $afcf^{-1}dbc^{-1}b^{-1}$. Для построения очередной клетки возьмем какую-нибудь букву x^i, $\quad i \in \{-1, +1\}$, не вошедшую в уже построенные циклы, и построим цикл, начиная с соответствующего ребра. В нашем примере мы можем начать, скажем, с буквы e. Очевидно, что два таких цикла либо не пересекаются, либо совпадают. Так продолжается до тех пор, пока сохранились неиспользованные буквы. В результате мы получаем набор путей по графу, в котором каждая из букв x^i встречается ровно по одному разу.

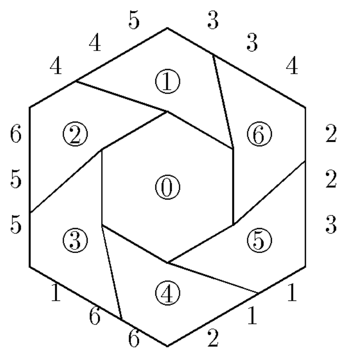
В рассматриваемом примере этот набор путей имеет вид

$$afcf^{-1}dbc^{-1}b^{-1}, \quad ea^{-1}d^{-1}, \quad e^{-1}$$

Наша двумерная поверхность склеивается теперь из клеток, соответствующих построенным путям. При этом склейка происходит по ребрам, обозначенным одинаковыми (с точностью до -1 в показателе) буквами.

Замечание. Легко понять также из проведенного построения, как строить гомеоморфизм, переводящий одно вложение графа с вращениями в другое. Для этого достаточно склеить гомеоморфизмы соответствующих клеток (каждой клетке в любом вложении однозначно сопоставлен некоторый циклический путь по ребрам графа).

В завершение покажем, что на торе есть карты, которые нельзя правильно раскрасить в 6 цветов. Для этого построим вложение полного графа K_7 в тор. Мы приводим рисунок разбиения тора на 7 клеток, каждая из которых граничит со всеми остальными. Двойственный граф является графом K_7



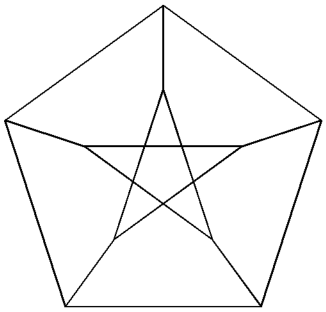
Задачи

1. Граф K_4 — планарный. Можно ли вложить его:

   а) в тор;

   б) в крендель?

2. Имеются ли вложения графа Петерсена



   (a) в тор;

   (b) в крендель?

3. Можно ли вложить граф K_5 в крендель?

4. Можно ли вложить K_2^4 — 4-мерный куб — в тор?

5. Пусть имеется $2n-$угольник, на сторонах которого проставлены буквы, так что ровно по разу встречается пара $a, \ldots, a^{-1}$, то после склейки соответствующих пар сторон получается некоторая ориентированная поверхность

   а) какой максимальный род может иметь такая поверхность?

   б) сколькими способами расстановки букв можно достичь этого максимального рода?

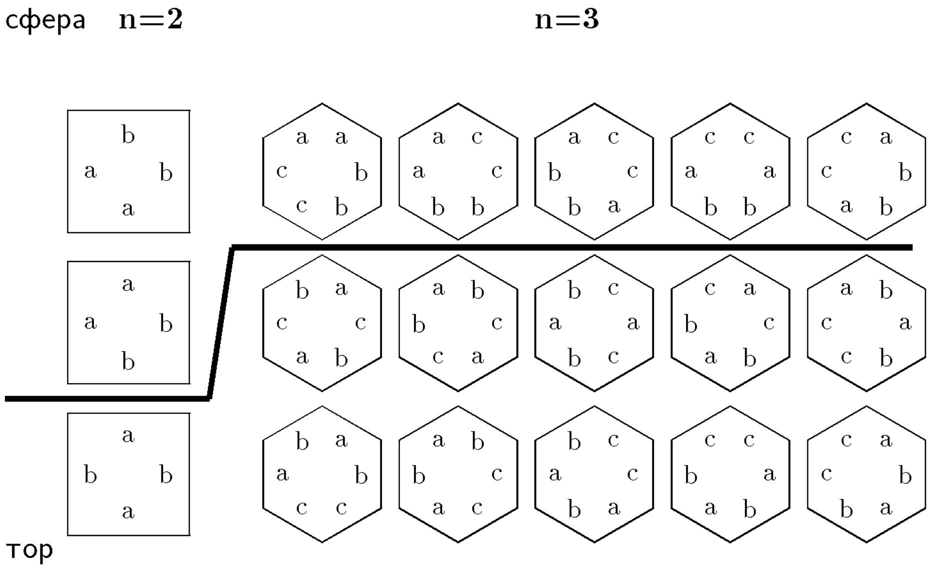
ЛЕКЦИЯ 10. О числе склеек многоугольника.

10.1. Примеры склеек.

Обратимся к одной из задач предыдущей лекции.

Упражнение 10.1. *Рассмотрим правильный $2n$-угольник и разобьем его стороны на пары всевозможными способами. Для каждого такого разбиения на пары склеим стороны, принадлежащие одной паре. При этом получится замкнутая ориентированная поверхность. При скольких способах склейки мы получим поверхность рода 0, рода 1, ..., рода g?*

Начнем, как обычно, с примеров.



Пусть $n = 2$, и мы рассматриваем склейки квадрата. Стороны квадрата можно разбить на пары тремя способами. Два первых способа при склейке дают сферу; третье разбиение дает тор. При $n = 3$ имеется 15 способов разбить на пары стороны шестиугольника. Нетрудно видеть, что 5 разбиений в первой строчке дают при склейке сферу, а остальные 10 — тор.

Упражнение 10.2. *Подсчитайте число различных склеек сторон $2n$-угольника.*

Упражнение 10.3. *Допустим, что у нас задано разбиение сторон $2n$-угольника на пары. Соединим середины сторон одной пары отрезками. Докажите, что соответствующая склейка многоугольника дает сферу в том и только в том случае, если никакие два из проведенных отрезков не пересекаются.*

Упражнение 10.4. *Выведите из предыдущего упражнения, что число склеек сторон $2n$-угольника, дающих сферу, равно n-му числу Каталана.*

Упражнение 10.5. *Подсчитайте число склеек сторон 8-ми и 10-угольника, дающих тор.*

Упражнение 10.6. *Докажите, что род поверхности, которую можно склеить из $2n$-угольника, не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$.*

После склейки сторон $2n$-угольника его граница образует граф на склеенной поверхности. Дополнение этого графа — это одна клетка, внутренность многоугольника. Поэтому полученный граф является вложенным. Тем самым, для этого графа справедлива формула Эйлера. Число Р ребер графа равно n — половине числа сторон многоугольника. Число Г граней равно 1. Поэтому число вершин В и род g склеенной поверхности связаны соотношением

$$В - Р + Г = В - n + 1 = 2 - 2g$$

Таким образом, *род поверхности однозначно определяется числом вершин в графе, склеенном из сторон многоугольника.*

Упражнение 10.7. *Докажите, что склейка сторон многоугольника дает сферу в том и только в том случае, если склеенный граф сторон — дерево.*

10.2. Производящая функция для склеек.

Сопоставим каждому числу n многочлен $T_n = T_n(N)$ — производящий многочлен для числа способов склейки сторон $2n$-угольника. Коэффициент при N^B в многочлене T_n равен числу способов склейки сторон $2n$-угольника, при которых склеенный граф сторон имеет B вершин. Род поверхности по этим данным определяется однозначно. Таким образом, число способов склейки поверхности рода g из $2n$-угольника равно

$$\left[N^{n-2g+1}\right] T_n(N).$$

Выпишем несколько первых многочленов T_n. Положим для удобства $T_0(N) = N$. Далее, $T_1(N) = N^2$ — единственная возможная склейка "правильного двуугольника" дает граф с двумя вершинами на сфере. Следующие два многочлена были нами фактически подсчитаны:

$$T_2(N) = 2N^3 + N,$$

$$T_3(N) = 5N^4 + 10N^2.$$

Можно подсчитать также

$$T_4(N) = 14N^5 + 70N^3 + 21N,$$

$$T_5(N) = 42N^6 + 420N^4 + 483N^2.$$

Упражнение 10.8. *Докажите, что если n четно, то многочлен T_n нечетен, и наоборот.*

Выпишем теперь производящую функцию двух переменных — обычную по аргументу N и экспоненциальную по аргументу s:

$$T(N;s) = 1+2sT_0(N)+2s^2\frac{T_1(N)}{1!!}+2s^3\frac{T_2(N)}{3!!}+\ldots = 1+2s\sum_{n=0}^{\infty} s^n\frac{T_n(N)}{(2n-1)!!}$$

Исходная задача может быть переформулирована следующим образом:

Найти производящую функцию $T(N;s)$.

10.3. Теорема Харера-Загира.

Теорема *(Харер, Загир, 1986).*

$$T(N;s) = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N$$

Доказательство этого удивительно красивого утверждения состоит из двух частей.

Лемма. *Рассмотрим выражение $t(N,n) = \frac{T_n(N)}{(2n-1)!!}$ как функцию от n при фиксированном N. Тогда $t(N,n)$ — многочлен от n степени $N-1$.*

Единственное известное доказательство этого факта, хотя и не очень сложное, использует нетривиальную технику интегрирования по гауссовой мере на пространстве эрмитовых матриц, поэтому я его приводить не буду.

Задача (нерешенная). Найти чисто комбинаторное доказательство предыдущей леммы.

Оставшаяся часть доказательства носит вполне комбинаторный характер.

Доказательство теоремы Харера-Загира.

Предположим, что вершины нашего $2n$-угольника раскрашены в несколько цветов. Будем говорить, что склейка сторон многоугольника *согласована с раскраской*, если при этой склейки склеиваются только вершины одинаковых цветов.

Утверждение. *Число $T_n(N)$ есть в точности число склеек сторон $2n$-угольника, согласованных с раскраской его вершин в (не более, чем) N цветов.*

Действительно, пусть в результате склейки граница многоугольника переходит в граф с В вершинами. Раскрасим каждую вершину графа в один из N цветов. Каждая такая раскраска задает раскраску вершин исходного многоугольника, причем выбранная склейка согласована с этой раскраской. Всего же раскрасить В вершин графа в N цветов можно в точности N^B способами. (Мы не требуем, чтобы раскраска была правильной — т.е. чтобы смежные вершины графа были раскрашены в разные цвета).

Введем функцию $\bar{T}_n(N)$ — число склеек $2n$-угольника, согласованных с раскраской его вершин в точности в N цветов. Тогда

$$(*) \qquad T_n(N) = \sum_{L=1}^{N} \binom{N}{L} \bar{T}_n(L)$$

т.к. L цветов могут быть выбраны из N цветов в точности $\binom{N}{L}$ различными способами. При этом $\bar{T}_0(N) = \bar{T}_1(N) = \ldots = \bar{T}_{N-2}(N) = 0$, так как вершины $2n$-угольника нельзя покрасить больше, чем в $n+1$ различных цветов (чтобы после этого существовала склейка, согласованная с раскраской).

Функция $\bar{t}(N,n) = \frac{\bar{T}_n(N)}{(2n-1)!!}$ является многочленом по n степени $N-1$, причем мы знаем $N-1$ корень этого многочлена: $0,1,2,\dots,N-2$. Поэтому существует такая постоянная a_n, что

$$\bar{t}(n,N) = a_n n(n-1)(n-2)\dots(n-N+2) = A_N \binom{n}{N-1}(N-1)!$$

Подставляя это выражение в равенство (*), получаем

$$T_n(N) = (2n-1)!!\sum_{L=1}^{N} A_L \binom{n}{L-1}\binom{N}{L}(L-1)!$$

В частности, старший коэффициент по N многочлена $T_n(N)$ равен

$$\frac{A_{n+1}n!}{(n+1)!}(2n-1)!!.$$

С другой стороны, мы знаем, что этот коэффициент равен n-му числу Каталана:

$$\frac{A_{n+1}n!}{(n+1)!}(2n-1)!! = c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Поэтому $A_{n+1} = \frac{2^N}{N!}$. Таким образом,

$$T_n(N) = (2n-1)!!\sum_{L=1}^{N} 2^{L-1}\binom{N}{L}\binom{n}{L-1}.$$

Сравнивая последнее выражение с разложением функции $\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N$ по степеням s, получаем доказательство теоремы Харера-Загира.

Задача о склейках многоугольника имеет важную переформулировку в терминах склейки ежей. Рассмотрим на поверхности, склеенной из многоугольника, граф, двойственный графу, полученному склейкой границы. У такого графа одна вершина (так как у исходного вложенного графа была одно грань), n ребер (столько же, сколько и у исходного графа) и В граней, где В — число вершин исходного графа. Тем самым, двойственный вложенный граф может быть получен склейкой $2n$-ежа.

Наоборот, всякая склейка $2n$-ежа дает некоторую склейку $2n$-угольника.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Число склеек $2n$-ежа, дающих поверхность рода n, равно $T_n(N)$.

Задачи экзамена

6 июня 1993 года

1. Хроматический многочлен графа Γ имеет вид:

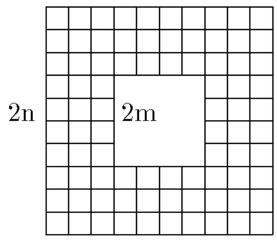
$$\chi_\Gamma(t) = t^{v(\Gamma)} + \ldots,$$

где $v(\Gamma)$ — число вершин графа Γ . Найти следующий ненулевой коэффициент многочлена χ_Γ.

2. а) Доказать, что

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

б) Найти число различных кратчайших по длине путей ладьи из левой нижней клетки в правую верхнюю клетку доски размером $2n \times 2n$, из центра которой вырезана доска размером $2m \times 2m$.



3. Можно ли вложить в лист Мебиуса:
а) граф K_5;
б) граф $K_{3,3}$? Если ответ положительный, то приведите соответствующее вложение.

4. Диагональные элементы в матрице $n \times n$ равны 0. Подсчитать число ненулевых мономов в разложении определителя этой матрицы.

5. Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа $n \geq 1$ (включая 1 и n; например, $\sigma(6) = 12$). Рассмотрим производящую функцию $\Sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n$ и производящую функцию $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n$ для числа разбиений.
а)докажите, что $\Sigma(x) = x\frac{P'(x)}{P(x)}$;
б) выведите из этого рекуррентное соотношение для чисел $\sigma(n)$.

6. Написать производящую функцию для последовательности ${f_n}^2$, где f_n — числа Фибоначчи: $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n \geq 1$.