4.10.93

Дифференцируемые многообразия. Векторы и ковекторы.

Многообразие X: топологическое пространство, метризуемое. В более общем случае можно рассмотреть вместо метризуемости усиленное свойство хаусдорфовости: пусть A, B — замкнутые множества, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists U$, V — открытые, $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Lemma *Метризуемое пространство хаусдорфово в этом смысле.*

Proof Пусть $\rho(x, y)$ — метрика с обычными свойствами. Докажем лемму для случая, когда A, B — точки, т.е. обычную хаусдорфовость. Тогда $\delta = \rho(A, B) > 0$. Достаточно взять $U(A) = \{y : \ \rho(y, A) < \delta/3\}$. Аналогично определяется $U(B)$.

Пример не хаусдорфова одномерного многообразия: склейка отрезков по открытому интервалу, см. рис. 1.

Figure 1:

В общих чертах многообразие — локально евклидово хаусдорфово пространство. Локальная евклидовость означает, что $\forall \ A \in X \ \exists$ открытая окрестность $U(A) \approx \mathbb{R}^n$, т.е. в этой окрестности можно ввести координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Декартовы координаты порождают представление о 4-х мерном устройстве физического пространства. Привлекательность гипотезы о глобальной евклидовой структуре пространства объясняется огромным размером Вселенной. Рассмотрим, например, факт вращения Земли вокруг Солнца. Для его доказательства надо пронаблюдать параллакс, т.е. отклонение положения дальних звезд. Звезды оказались так далеко, что годичный параллакс пронаблюдали только во второй половине 19 века. По современным представлениям, существование вселенной оценивают 10 миллиардами лет. Объем ее ограничен. Но локально мир имеет евклидову пространственно-временную структуру.

Введем понятие дифференцируемого многообразия.

Definition *Многообразие дифференцируемо — значит в окрестности каждой точки зафиксирован специальный класс "допустимых" координат, т.ч. если x_i', x_i — допустимые координаты, то функции замены координат $x_i'(x_i)$ и $x_i(x_i')$ — дифференцируемые функции (по умолчанию класса C^∞).*

Недифференцируемые многообразия открыты Дж.Милнором в конце 50-х годов.

В целом многообразие представляется в виде:

$X = \bigcup_\alpha V_\alpha$ — атлас из локальных карт, U_α — карта. В пересечении карт координаты дифференциальным образом выражаются друг через друга.

Если нужно ввести дифференциально-геометрическую величину на многообразии, это делается локально в координатах. Анализ в координатах — средство вычисления. А геометрия контролирует еще поведение объекта при замене координат.

Простейший объект — скалярная функция.

Она дифференцируема, если дифференцируема в каждой локальной карте. Нет смысла рассматривать более гладкие функции, чем само многообразие. Например, аналитические функции надо рассматривать на аналитическом многообразии.

В физической литературе числовая (скалярная) функция называется просто скаляром. Скаляры фактически не меняются при замене координат:

В формальном анализе вычисления производятся просто с функциями. В геометрии специальные агрегаты функций образуют векторы, тензоры, спиноры и т.п.

Пример. Рассмотрим кривую $f : \mathbb{R} \to X : t \in \mathbb{R}, f(t) \in X$.

Касательный вектор (вектор скорости) кривой

Касательный вектор скорости кривой — это вектор с компонентами-производными: $V^i_\alpha = \dot{x}^i_\alpha(t_\circ)$, $i = 1, \ldots, n$. Это определение отнесено к данной системе координат.

Если представлять многообразие в виде атласа, то вектор всегда приложен в точке. Возможность переносить векторы параллельно не очевидна. В евклидовой планиметрии она обосновывается постулатом о параллельных. Формально-аксиоматический анализ ситуации дали Лобачевский, Больяи, Гаусс. Риман осуществил математический и естественно-научный анализ. Возможность переносить векторы определяется геометрией пространства. В Евклидовом векторы переносятся просто, т.к. там нулевая кривизна.

Итак:

1. Вектор рассматривается в точке A.
2. Он представляет собой набор чисел $V^1_\alpha, \ldots, V^n_\alpha$ в данной локальной системе координат V_α.
3. Пусть $A \in V_\alpha \cap V_\beta$. Одна и та же кривая записывается в разных координатах. $x^i_\alpha(t) = f^i(x^i_\beta(t))$, где f — функция перехода. Тогда

$$V^i_\beta = \frac{dx^i_\beta}{dt} = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha} \cdot \frac{dx^j_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\right)_A V^j_\alpha(t),\ t = t_0$$

.

Итак, вектор — такой объект на многообразии, который отнесен к данной точке A, задается в данной локальной системе координат, при замене координат преобразуется посредством матрицы Якоби. Совокупность всех векторов в данной точке образует n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^r = T_A X$ — касательное пространство в точке A.

Напомним индексное соглашение линейной алгебры:$V^j_\alpha = J^i_{(\alpha,\beta)j} V^j_\beta$ — эта запись означает суммирование по j. Знак суммы опускается.

Это удобно: $V = (V^i_\alpha)$, $V = (V^j_\beta)$, $V^i_\alpha = J^i_j V^j_\beta$, $J^i_j = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}$. Идет суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Все вышесказанное можно считать определением касательного вектора в точке.

Remark В 20-30 гг. были популярны недлинные аксиоматические определения.

Следующий объект — ковектор. Если вектор — калька с вектора скорости кривой, то ковектор — калька с градиента.

Definition 1. *Ковектором в точке A называется*

2. Набор чисел $(V_{\alpha 1}, \dots, V_{\alpha n})$ в данной системе координат $(x^1_\alpha \cdots x^n_\alpha)$

3. Преобразуется по правилу: $V_{j\beta} = V_{i\alpha} \left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right) |_A$.

Чтобы понять это правило, рассмотрим градиент некоторой функции f: $V_{\alpha i} = \frac{\partial f}{\partial x^i_\alpha}$. Тогда

$$V_{\beta j} = \frac{\partial f}{\partial x^j_\beta} = \frac{\partial f}{\partial x^i_\alpha} \cdot \left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right)$$

.

Сравним эти законы преобразования:

Векторы: $V^i_\alpha = V^j_\beta \left(\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\right) |_A$, матрица J^i_j.

Ковекторы: $V_{\beta j} = V_{\alpha i} \left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right) |_A$ — тогда это ${J^{-1}}^i_j$, т.е. в преобразовании участвуют взаимно-обратные матрицы, поскольку $\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \cdot \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^k_\alpha} = \delta^i_k$ — это просто формула дифференцирования сложной функции.

В линейной алгебре все то же, только матрицы постоянные.

Переходя к единообразной записи, имеем для векторов: $V^j_\beta = V^i_\alpha \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}$. В этой записи одна матрица относится к другой как обратная к транспонированной.

До Римана все преобразования происходили в ортогональных координатах, поэтому векторы и ковекторы не различали (обратная матрица совпадает с транспонированной). А угловая скорость и магнитное поле — не вектор и не ковектор (в физике — аксиальные векторы, в отличии от полярных; не различались при ортогональных преобразованиях с определителем $+1$). Все остальные сложные объекты проистекают из векторов и ковекторов. Вектор не дифференцируется без привлечения геометрии пространства.

Remark Все ковекторы в точке образуют линейное пространство $\mathbb{R}^n$, т.ч. базис $e^i = (o, \dots, 1, \dots, 0)$. Тогда ковектор $V_i e^i$; вектор $V^i e_i$.

Рассмотрим вектор $(V^1_\alpha \dots V^n_\alpha) |_A$; ковектор $(V_{\alpha 1}, \dots, V_{\alpha n}) |_A$.

Lemma *Рассмотрим $V^i_\alpha V_{\alpha i}$. Тогда это выражение не зависит от системы координат, т.е. пространства векторов и ковекторов двойственны.*

Proof Надо доказать, что $V^i_\alpha V_{\alpha i} = V^j_\beta V_{\beta j}$. Подставим: $V_{\beta j} = V_{\alpha i} \left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right) |_A$; $V^j_\beta = V^i_\alpha \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha} |_A$.

$$V_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} V_{\alpha k} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} = V_\alpha^i V_{\alpha k} \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} = V_\alpha^i V_{\alpha k} \delta_k^i = V_\alpha^i V_{\alpha i}, \text{ ч.т.д.}$$

Напомним, что дифференциал функции $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(dx^i)$ естественным образом является ковектором.

11.10.93.

Риманова метрика на многообразии. Тензоры.

Риманова (псевдориманова) метрика.

Введем риманову (псевдориманову) метрику на многообразии X размерности n: $X = \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$; V_α имеет координаты $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$. Современный подход к изучению метрических свойств пространства — при помощи скалярного произведения.

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ — это билинейная форма: для $\xi, \eta \ \in \mathbb{R}^n : <\xi, \eta> \in \mathbb{R}$, причем

$$<\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \eta> = \alpha_1 <\xi_1, \eta> + \alpha_2 <\xi_2, \eta>$$

$$<\xi, \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2> = \alpha_1 <\xi_1, \eta_1> + \alpha_2 <\xi_2, \eta_2>$$

Добавляется также условие симметричности $<\xi, \eta> = <\eta, \xi>$ и положительной определенности: $<\eta, \eta> > 0$ при $\eta \neq 0$.

Иногда используются отрицательные скалярные произведения, кососимметричные, комплексные (теория относительности, квантовая и классическая механика). В теории относительности рассматриваются отрицательные скалярные квадраты векторов.

Если задано скалярное произведение, легко определить длину вектора и угол между векторами:

$$|\,\eta\,| = \sqrt{<\eta, \eta>}, \ \cos\varphi = \frac{<\xi, \eta>}{|\,\xi\,||\,\eta\,|}.$$

Если точки отождествить с векторами, то расстояние между точками — длина соответствующего вектора. Заметим, что метрические понятия по существу 1- и 2-мерны.

Definition *Римановой (псевдоримановой) метрикой многообразия называется скалярное произведение, заданное в касательном пространстве в каждой точке и непрерывно зависящее от точки, рис.1.*

Рис.1.

Для удобства можно представлять себе все многообразие вложенным в пространство достаточно большой размерности. Но не надо соблазняться измерять, например, углы между векторами в разных точках поверхности. Ведь вложение в объемлющее пространство можно изменить, не изменяя внутренней геометрии поверхности.

Definition *В локальной системе координат (псевдо)риманова метрика задается системой функций* $g_{ij}^{\alpha}(x_\alpha^1 \dots x_\alpha^n)$, *т.ч.*

$$< v_\alpha, w_\alpha >= g_{ij}^{(\alpha)}(x_\alpha^1 \dots x_\alpha^n) v_\alpha^i w_\alpha^j = g_{kl}^{(\beta)}(x_\beta) v_\beta^k w_\beta^l,$$

т.е. результат не зависит от системы координат; при этом функции $g(x)$ *непрерывны.*

Получаем разные матрицы $\|g_{uh}^{(\alpha)}\|$ и $\|g_{kl}^{(\beta)}\|$ в разных системах координат. Из условия независимости выводится правило преобразования компонент g при замене систем координат.

Векторы преобразуются по правилу: для функций замены координат $x_\alpha(x_\beta)$. имеем $v_\beta^k = \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i} v_\alpha^i$ (суммирование по i).

Lemma *Пусть* $g_{ij}^{\alpha}(x_\alpha) \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_j^k} \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^l} = g_{kl}^{\beta}(x_\beta)$, *где* $x_\alpha = x_\alpha(x_\beta)$, *тогда скалярное произведение* $< v_\alpha, w_\alpha >$ *корректно определено, т.е. не зависит от системы координат.*

Proof $g_{ij}^{\alpha} v_\alpha^i w_\alpha^j = g_{kl}^{\beta} v_\beta^k w_\beta^k = g_{ij}^{\alpha} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^k} \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^l} v_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i} w_\alpha^j \frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^j} = g_{ij}^{\alpha} v_\alpha^i w_\alpha^j$

То же самое происходит при замене матриц квадратичных форм в линейной алгебре, только в этом случае матрицы перехода постоянны, $\widetilde{G} = J^* G J$, где J — матрица перехода (если верхний индекс — строка, нижний — столбец). В общем случае тензоры имеют много верхних и нижних индексов. Опять-таки при ортогональных заменах $J^* = J^{-1}$, и матрицы квадратичных форм не отличаются от линейных операторов (можно доказать, что если замена ортогональна в $\forall$ точке, то она глобально линейна). Итак,

Definition *Римановой метрикой называется зависящая от точки матрица* $g_{ij}(x)$ *, преобразуемая по указанному закону.*

Remark Та же метрика определит и произведение ковекторов $g^{ij} v_i w_j$, если метрика не вырождена; здесь $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

С заданием римановой метрики вся локальная геометрия будет задана: длины, углы, площади, объемы и т.п.

Definition *Пусть задана кусочно гладкая кривая, гладкость означает, что в локальной системе координат она задается дифференцируемыми (по крайней мере, C^1) функциями. Длиной кривой называется число* $l(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mid \dot{x}(t) \mid dt$, *где* $\dot{x}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, *т.е. в координатах* $v^i_\alpha = \dot{x}^i_\alpha(t)$. *Здесь* $\mid v(t) \mid = \sqrt{< v(t), v(t) >}$.

Длина положительна в случае положительно определенного скалярного произведения. Но в 4-мерном пространственно-временном континууме бывают нулевые и отрицательные длины. Например, лучи света, распространяются по кривым нулевой длины.

Длина кривой не зависит от выбора параметра:

$$\text{пусть } t = t(\tau),\ \frac{dt}{d\tau} > 0. \text{ Тогда } \mid \frac{dx}{d\tau} \mid d\tau = \mid \frac{dx}{dt} \mid dt, \text{ где } \mid \eta \mid = \sqrt{< \eta, \eta >},$$

т.е. длина имеет геометрический смысл, а не зависит от параметризации. Если замена не монотонна, результат не сохранится из-за многократного пробегания кривой. Длина аддитивна. Обычно рассматривается риманово скалярное произведение, которое симметрично:
$g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ и положительно: $< \eta, \eta > = g_{ij}(x)\eta^i \eta^j > 0,\ \eta \neq 0$.

Псевдориманово скалярное произведение невырождено, но не обязательно положительно. При произвольной замене даже в евклидовом пространстве непросто распознать евклидовость геометрии. Хорошо бы иметь внутренние характеристики. При $n = 2$ имеем три независимых матричных элемента метрики, а замена определяется двумя функциями, остается один свободный функциональный параметр, определяющий кривизну пространства, т.е. уже при $n = 2$ возможно разнообразие геометрий.

При росте размерности кривизна становится сложным тензорным объектом; в математике за два последних столетия произошла глубокая эволюция от наивных понятий кривизны Эйлера-Гаусса, как кривизны вложенных в пространство поверхностей.

В $\mathbb{R}^n$ расстояние между векторами $\rho(\eta_1, \eta_2) = \mid \eta_1 - \eta_2 \mid$. Т.е. нужно понятие нормы вектора. В банаховых пространствах рассматривают выпуклое (не обязательно симметричное) тело β, содержащее 0. Посредством его задается длина каждого вектора: $\mid \eta \mid_\beta = \rho(0,$ *граница тела*$)$ для векторов с евклидовой длиной 1, где β — расстояние в обычном смысле. Но тогда можно так сделать в каждом касательном пространстве и снова измерить длины кривых: получим финслерову геометрию. Обычно банаховы пространства реализуются как пространства функций.

Наконец, можно подойти и к понятию расстояния между точками многообразия. Естественно его считать как минимум длин кривых, соединяющих точки. Кривая, на которой этот минимум достигается, называется геодезической. Существование локальной геодезической на двумерной поверхности — глубокий результат Гильберта конца 19 века.

Тензоры.

Мы уже знаем скаляры, (числовые функции или скалярные поля), векторы, ковекторы, скалярные произведения.

Definition *Тензорным полем типа* (p,q) *называется набор функций* $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x_\alpha)$, $i_k, j_l = 1,\dots,n$.

В итоге имеем n^{p+q} независимых функций, причем при замене координат $x_\alpha(x_\beta)$ они преобразуются по закону:

$$T^k_l(x_\beta) = \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} T^i_j(x_\alpha) \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} \ \text{ – в краткой записи, или}$$

$$T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots\ l_q}(x_\beta) = \frac{\partial x^{k_1}_\beta \cdots \partial x^{kp}_\beta}{\partial x^{i_1}_\alpha \cdots \partial x^{i_p}_\alpha} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x_\alpha) \frac{\partial x^{j_1}_\alpha \cdots \partial x^{jq}_\alpha}{\partial x^{l_1}_\beta \cdots \partial x^{l_q}_\beta}.$$

Число $p+q$ называется рангом тензора; пара (p,q) — тип тензора.

Выпишем все возможные случаи для $n=2$ (для (1,0) — векторов; (0,1) — ковекторов уже было). Для ранга 2: ((0,2) — уже было) (1,1) — линейный оператор (аффинный).

$T^i_j(x_\alpha)\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^i_\alpha}\frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta} = T^k_l(x_\beta)$, аналог в линейной алгебре $T' = J^{-1}TJ$.

Упражнение: Покажите, что матрица, обратная к матрице (0,2) приобретает тип (2,0).

Собственные числа матрицы скалярного произведения не имеют геометрического смысла, приобретают его лишь при наличии римановой метрики, но имеют инвариантный смысл если тензор (1,1).

Т.о. линейная алгебра — теория тензоров низких рангов в линейном пространстве.

18.10.93.

Рассмотрим замену координат на многообразии $x(y)$: $(x^1,\dots,x^n)\mapsto(y^1,\dots,y^n)$. Тензор T преобразуется по закону:

$$T^I_J(x)\frac{\partial x^J}{\partial y^I}\frac{\partial y^K}{\partial x^I}=T^K_L(x(y))$$

Здесь $I=(i_1,\dots,i_p)$, $J=(j_1,\dots,j_q)$, $\frac{x^J}{\partial y^L}=\frac{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_1}\cdots\partial y^{l_q}}$; $K=(k_1,\dots,k_p)$; $L=(l_1,\dots,l_q)$.

Введем базисы в пространствах тензоров.

Базис в пространстве векторов — это просто набор координатных векторов $e_1,\dots,e_n$. Заметим, что векторы можно отождествить с дифференциальными операторами первого порядка:

$$e_i\sim\frac{\partial}{\partial x^i},\ V^i(x))\sim V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $V(x)$ — векторное поле.

Это отождествление разъясняется дифференцированием по направлению вектора:

$$f(x^1,\dots,x^n),\ x(t)=(x^i(t)),\ \frac{df(x(t))}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x^i}V^i,$$

где $V^i=\frac{dx^i}{dt}$, т.е., чтобы найти производную по направлению вектора, надо знать компоненты вектора и производные по базисным векторам. Коэффициенты дифференциального оператора первого порядка преобразуются как векторы. Производная по направлению есть скалярное произведение вектора скорости кривой на ковектор градиента функции. Векторное поле $V(x)=V^i(x)e_i$ — дифференциальный оператор первого порядка.

Введем также базисные ковекторы $e^i=dx^i$. Ковекторные поля $w=w_ie^i=w_i(x)dx^i$ — дифференциальные 1-формы. Например, дифференциал функции — дифференциальная 1-форма $df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$.

Наконец, рассмотрим тензор типа (p,q), ранга $p+q$: $T^I_J(x)$, где $I=(i_1,\dots,i_p)$, $J=(j_1,\dots,j_q)$. Всего есть n^{p+q} функций. Обозначим элемент базиса через

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}.$$

Что это за элемент? Просто его (I,J)-я компонента равна 1, а все остальные 0. Т.е. это обычный стандартный базис n^{p+q}-мерного пространства. Знак $\otimes$ указывает на недопустимость, вообще говоря, перестановок сомножителей. Но множитель с верхним индексом можно переставить с множителем с нижним индексом. Например $e^i\otimes e_j=e_j\otimes e^i$; но $e^i\otimes e^j\neq e^j\otimes e^i$.

Тензоры типа (p, q) образуют в данной точке x n^{p+q}-мерное линейное пространство. Тензоры в точке можно перемножать: $T_J^I = T_{(1)}{}_{J_1}^{I_1} \cdot T_{(2)}{}_{J_2}^{I_2}$, если $I = (I_1, I_2)$, $J = (J_1, J_2)$.

Ведь компоненты можно перемножать просто как скаляры. Например, $v^i w^j = T^{ij}$, $T_j^i = v^i w_j$.

Упражнение. Произведение тензоров действительно тензор, т.е. преобразуется по тензорному закону.

Операция перестановки индексов (отдельно верхних или нижних): $T^{ij} \to T^{ji}$ — корректная операция для тензора типа (2,0). Но операция $T_j^i \to T_i^j$ некорректна.

Верхние индексы называются векторными, а нижние — ковекторными. В общем виде операция перестановки индексов имеет вид

$T_J^I \mapsto T_{s_2(J)}^{s_1(I)}$, где s_1, s_2 — перестановки соответствующих множеств индексов.

Remark В линейной алгебре нет перестановок верхних и нижних индексов, т.е. симметрический оператор имеет смысл, если только задано скалярное произведение. А симметрическая квадратичная форма имеет смысл.

Операция взятия следа (свертка)

Рассмотрим на примере. $T_j^i(x) \mapsto T_i^i(x)$ — след. Эта операция имеет инвариантный смысл. Для операторов это доказано в линейной алгебре.

Введем общую операцию взятия следа.

$$T_J^I = T\begin{matrix}(I'i & I'') \\ (J'j & J'')\end{matrix}(x) \mapsto T\begin{matrix}(I' & I'') \\ (J' & J'')\end{matrix}(x) = T_{(J'iJ'')}^{(I'iI'')},$$

т.е. выделили один верхний и один нижний индекс и провели суммирование.

Например $T_j^i = v^i w_j \mapsto v^i w_i = (v, w)$ — скалярное произведение вектора и ковектора есть частный случай взятия следа.

$T_j^i v^j$ — применение матрицы к вектору — тоже частный случай следа: $T_j^i v^k \mapsto T_j^i v^j$.

$T_j^i w_i$ — применение матрицы к ковектору то же: $T_j^i w_k \mapsto T_j^i w_i$.

Упражнение: взятие следа корректно определено.

Пусть в пространстве имеется (симметричные) скалярное произведение, задающее (псевдо)риманову метрику. Применим операцию взятия следа:

$v_i = g_{ij} v^j$, где $\det g_{ij} \neq 0$

Указанная операция называется операцией опускания индекса: из вектора можно получить ковектор.

$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

Аналогично можно рассмотреть поднятие индексов $g^{ij} v_j = v^i$.

Lemma *Поднятие и опускание индексов — обратные операции.*

Proof Очевидно.Именно здесь нужна невырожденность матрицы g_{ij}.

Евклидовой называется геометрия, для которой в некоторых координатах $g^{ij} = \delta^{ij}$.

Псевдоевклидова геометрия — когда $g^{ij} = \text{const}$.

Важным примером является лоренцева метрика, когда один квадрат с "+", три с "-". Такие координаты существуют не всегда, впоследствии мы выясним необходимые и достаточные условия этого.

Из тензора T^{ij} выделим $\frac{T^{ij}-T^{ji}}{2}$ — кососимметричная часть и $\frac{T^{ij}+T^{ji}}{2}$ — симметричная часть.

То же можно проделать с тензором (2,0).

Но с тензором T^i_j — нельзя без римановой метрики.

$T^{ij} = g^{ik}T^j_k$, $T_{ij} = g_{ik}T^k_j$.

Собственные числа T^i_k корректно определены только в присутствии метрики:

$$\det||T_{ij} - \lambda g_{ij}|| = 0.$$

Некоторые важные физические тензоры (например, энергии-импульса) симметричны без метрики. В пространстве Минковского симметричная матрица может иметь комплексные собственные числа.

Если метрика положительна, есть простые аналитические рецепты нахождения собственных чисел симметрической матрицы (экстремум на единичной сфере).

В неположительной метрике все по-другому.

$g_{ij} = \pm\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm1 \end{pmatrix}$ — метрика, у симметрических матриц могут появиться собственные мнимые значения.

Упражнение: Разберитесь со случаем n=2.

Рассмотрим тензор δ^i_j, он не меняется при замене координат, поскольку $J^{-1}(\delta^i_j)J = \delta^i_j$. А матрица квадратичной формы не сохраняет это свойство.

Современные тензорные обозначения восходят к Риману. До этого в двумерной геометрии поверхностей использовались классические обозначения компонент симметрической матрицы E, F, G.

Симметричные и кососимметричные тензоры (с нижними индексами)

$T_{(j_1,\ldots,j_q)}$ — полилинейная форма от векторов, т.е. функция от q векторов, линейная по каждому аргументу. Возьмем набор векторов $v_1, \cdots, v_q$, $v_s = v^j_s$. Положим $T\langle v_1, \ldots, v_q\rangle = T_{j_1\cdots j_q}v^{j_1}_1 \cdots v^{jq}_q$. Очевидно, это полилинейная форма.

Рассмотрим операцию ограничения тензора на подпространстве. Векторное поле не ограничивается на подпространство, если нет метрики. Так, проектирование есть композиция операций опускания индекса, ограничения, поднятия индекса.

Пример: в анализе мы проделывали ограничение: $f_i(x)dx^i$, $x^i(t)$ — кривая, $\mapsto f_i(x(t))\frac{dx^i}{dt}dt$

Definition *Тензор симметричный, если $T_{i_1,\cdots,i_q} = T_{s(i_1\cdots i_q)}$, где $s \in S_n$, т.е. это фактически коэффициенты однородных полиномов степени q от n переменных: $T_{i_1\cdots i_q}x^{i_1}\cdots x^{i_q}$.*

Definition *Тензор кососимметрический, если*

$$T_{i_1\cdots i_q} = (-1)^{\sigma(s)}T_{s(i_1\cdots i_q)},$$

где σ — четность перестановки.

Кососимметрические тензоры есть дифференциальные формы и подвергаются интегрированию.

Lemma *1. Пусть $q > n$. Тогда кососимметрический тензор $T \equiv 0$.*

2. Если же $q = n$, то пространство таких тензоров одномерно.

3. При замене $x = x(y)$ кососимметрический тензор ранга n преобразуется по закону $T' = T\det J$.

Proof 1. $T_{i_1\cdots i\cdots i\cdots i_q} = -Ti_1\cdots i\cdots i\cdots i_q \Rightarrow T = 0$.

2. $T_{1,\ldots,n} \neq 0$. А все остальные компоненты либо равны 0, либо совпадают с ней с точностью до знака.

3. Детерминант — единственный кососимметрический тензор ранга n в n-мерном пространстве.

$$T_{j_1\cdots j_n} = T_{i_1\cdots i_n}(x(y))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}} = T_{(1,2,\cdots,n)}(x(y))$$

.

$$(-1)^{\sigma(s)}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}} = T_{(1,2,\cdots,n)}\det\frac{\partial x}{\partial y}$$

Итак, $T' = T\det J$.

Существенно, что тензорная теория интегрирования не зависит от координат и римановой метрики.

Законы природы также подразделяются на зависящие и не зависящие от метрики пространства.

Часть уравнений Максвелла требует, а часть не требует римановой метрики.

Также можно построить и часть топологии, не зависящую от метрики.

25.10.93.

Дифференциальное исчисление тензоров.

а) Инвариантное дифференциальное исчисление тензоров.

б) Дифференциальное исчисление тензоров в римановой метрике.

Рассмотрим тензор $T^I_J(x)$ на n-мерном многообразии с локальной координатой, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $I = (i_1, \ldots, i_p)$, $J = (j_1, \ldots, j_q)$. Тип тензора (p, q), ранг $p + q$. Напомним, что тензоры образуют в каждой точке n^{p+q}-мерное линейное пространство. Была определена операция произведения тензоров: $(p, q) \times (p', q') = (p + p', q + q')$, а также операции перестановки верхних или нижних индексов и взятия следа.

$$T^I_J(x) \mapsto T^{\sigma_1(I)}_{\sigma_2(J)};\ T^I_J(x) \mapsto T^{I'iI''}_{J'iJ''},\ \text{где}\ \begin{matrix} I = I'iI'' \\ J = J'jJ'', \end{matrix}$$

а затем положено $i = j$ и произведено суммирование. В результате $(p, q) \mapsto (p - 1, q - 1)$.

Все это были инвариантные алгебраические операции, не зависящие от системы координат, в которой они проделываются.

Рассматриваются также специальный класс тензоров только с нижними индексами $T(x) = \{T_{i_1 \ldots i_p}(x)\}$, т.е. типа $(0, p)$. Они представляют собой полилинейные функции от набора векторов $v_1 \cdots v_p$, а именно, положим: $T\langle v_{(1)}, \ldots, v_{(p)}\rangle = T_{i_1 \cdots i_p}(x) v^{i_1}_{(1)} \cdots v^{i_p}_{(p)}$. Очевидно, есть линейность по каждому аргументу, т.е.

$$T\langle \cdots, \lambda a + \mu b, \cdots\rangle = \lambda T\langle \cdots, a, \cdots\rangle + \mu T\langle \cdots, b, \cdots\rangle$$

.

Полилинейные функции, как и всякие, можно ограничивать на подпространство, например на касательное подпространство к подмногообразию. Непонятно, как ограничить вектор на касательное подпространство, если он там не лежит. Это можно сделать, если есть риманова метрика, тогда появится и проектирование.

Пример: Рассмотрим (0,1) тензор $f_i dx^i$. Пусть $x^i(t)$ — кривая. Ограничить тензор $f_i(x) dx^i$ — это просто подставить: $f_i(x(t)) \left(\frac{dx^i}{dt}\right) dt = (f_i x^i) dt$. Так ограничивается ковекторное поле. Это выражение можно проинтегрировать вдоль кривой, метрика совершенно не требуется. Мы имеем числовую функцию на кривой, можно ее интегрировать (если кривая гладкая, т.е. имеет непрерывный касательный вектор).

Это свойство лежит в основе теории интегрирования дифференциальных форм. Выделены два важных класса тензоров — симметрические и кососимметрические. Симметрические тензоры — просто коэффициенты однородных многочленов степени p. Тензор кососимметрический, если $\forall x\ \forall\sigma\ T_{\sigma(T)}(x) = (-1)^\sigma T_I(x)$.

Сравнивая формулу замены переменных в кратном интеграле и закон преобразования кососимметрических тензоров, можно понять, что интегрируются на самом деле кососимметрические тензоры. Нельзя интегрировать числовые функции.

Напоминаем лемму о кососимметрических тензорах:

Lemma *1.* $T_{i_1\cdots i_p} = 0$, *если* $p > n$.

2. $p = n$, $T_{i_1\cdots i_n}(x) = (-1)^\sigma T_{12\cdots n}(x)$.

3. $x = x(y)$, *тогда*
$\widetilde{T}_{12\cdots n}(x(y)) = J(x(y))T_{12\cdots n}(x(y))$, *где* $J(x(y)) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$.

Напомним доказательство пункта 3):

$$\widetilde{T}_{12\cdots n}(x(y)) = T_{i_1,\cdots,i_n}(x(y))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y'}\cdots\frac{\partial x_{i_n}}{\partial y^n} =$$
$$= T_{12\cdots n}(x(y))\sum_\sigma(-1)^\sigma\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y'}\cdots\frac{\partial x_{i_n}}{\partial y^n} = T_{12\cdots n}(x(y))\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right).$$

Полученный детерминант есть единственный кососимметрический тензор ранга n.

Наш общий вопрос: как проинтегрировать кососимметрический тензор ранга k по k-мерному многообразию. Очень просто: ограничим его, получим k-мерный тензор на k-мерном подмногообразии, он с точностью до числового множителя детерминант, остается проинтегрировать числовую функцию. Вариационное исчисление ограничивает бесконечномерные формы на конечномерные пространства и интегрирует. Какое отличие полного тензора от скаляра: при замене координат значение меняется, умножается на якобиан преобразования. Говорят так: выделяем элемент объема, после этого любая функция превращается в форму домножением на этот элемент и интегрируется. На самом деле не всегда интегрируются только дифференциальные формы.

Пример для $n = 1$. Бывают интегралы $f(t)dt$ и $f(t) \mid dt \mid$. Различие чувствуется, только когда замена имеет отрицательную производную.

Что можно проинтегрировать по любой кривой?

1) Дифференциальную форму (II рода).

2) Функцию по длине кривой. (I рода).

Общий взгляд. 1) В каждой точке x надо задать функцию касательного вектора $\sigma(V)$, т.ч. $\sigma(\lambda V) = \lambda\sigma(V)$ для $\lambda > 0$. Тогда можно брать интеграл

$\int \sigma(\dot{x}(t))dt$. Из-за свойства "линейности" интеграл останется инвариантным при замене параметра.

Итак, по кривой можно интегрировать то, что при ограничении получит вид $f(t)dt$ и так далее.

Интегралы от дифференциальных форм имеют важные свойства, позволяющие ввести их в формулировки законов природы. А именно: это связь интегралов по многообразию и границе (формулы типа Стокса), а также топологическая инвариантность интегралов.

Пример.

$$\int d\varphi = 2\pi, \text{ где } d\pi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

и интегрирование осуществляется по замкнутой кривой, охватывающей 0. Т.е. при деформации одной кривой в другую значение не меняется. Нельзя только протаскивать кривую через 0. Т.е. наш интеграл — не аналитическая, а топологическая величина. Это часто встречается в ТФКП — там интегралы оказываются топологическими. Например, наш интеграл фактически задает определение числа оборотов вокруг 0. Эти важные свойства есть у интегралов только от кососимметрических тензоров.

Дифференциальная форма — кососимметрический тензор с нижними индексами на многообразии. Их можно изучать отдельно от общей теории тензоров. Разработана дифференциальная символика записи. Например, $f = (f_i(x)) \sim f_i(x)dx^i$.

Итак, рассмотрим кососимметрический тензор $T_{i_1\cdots i_p}(x)$. Мы рассматривали его в базисе $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$. Перейдем к другому базису: $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = (\sum\limits_{\sigma}(-1)^{\sigma} e^{i_1 \otimes \cdots \otimes i_p})/p!$.

Примеры: $p = 1$, эти базисы совпадают: dx^i.
$p = 2: \quad dx^i \wedge dx^j = 1/2(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$.

Заметим, что замена не целочисленная, что имеет определенные последствия.

Если старый базис был удобен для операции обычного произведения тензоров, то в новом удобно задать кососимметричное внешнее произведение.

Итак, дифференциальная форма имеет вид

$$\Omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \Omega_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \ p = 0, 1, \ldots, n.$$

Это локальная запись. Если $x = x(y)$, то $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$.

Зададим внешнее произведение по правилам:

1. $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

2. Ассоциативность операции внешнего умножения $\wedge$.

3. Билинейность: $(\alpha dx^i + \beta dx^j) \wedge dx^k = \alpha dx^i \wedge dx^k + \beta dx^j \wedge dx^k$.

Таким образом, в каждой точке x имеется алгебра. Произведение любых двух форм можно найти с учетом этих правил.

Remark С одной стороны, эту операцию можно определить через классические операции над тензорами, с другой стороны, можно излагать теорию дифференциальных форм независимо от тензоров.

Над дифференциальными формами имеется единственная инвариантная дифференциальная операция — внешнее дифференцирование .

Пример $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Рассмотрим ковекторное поле (f_i).

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) = T_{ij}$ — не тензор (тензор лишь для аффинных замен). Тензором будет $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} = T_{ij} - T_{ji}$.

Здесь сложность в дифференцировании принципиальная.

$f(x+\Delta x) - f(x)$ — имеет смысл. А разность векторов или ковекторов в разных точках не имеет корректного смысла без римановой структуры. Так что нам остается единственная дифференциальная операция, сохраняющая тензоры (ротор — это ее частный случай). Иногда через них записываются законы природа (часть законов Фарадея-Максвелла). Пример ковекторного поля — вектор электрической напряженности. По гипотезе Эйнштейна гравитация — риманова метрика 4-мерного мира. Но некоторые законы абсолютно инвариантны. Магнитное поле — дифференциальная форма с двумя индексами. Соответственно интегрируются: электрическое поле по кривой, магнитное по площадке.

Definition *Дифференцирование (внешнее) дифференциальных форм:*

1. *df — дифференциал скалярной функции $\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.*
2. *$d(dx^i) = 0$.*
3. *$d(\Omega_{1(p)} \wedge \Omega_{2(q)}) = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \wedge d\Omega_2$*

Пример.

$$\begin{aligned} d(f_i(x)dx^i) &= df_i \wedge dx^i = \\ = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i &= \sum_{i<k} (\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f^k}{\partial x^i})(dx^i \wedge dx^k). \end{aligned}$$

01.11.93.

Дифференциальные формы — кососимметричные тензоры только с нижними индексами. $T_{i_i\dots i_p}(x) = \sum\limits_{i_1<\dots<i_p} \Omega(x) dx^{i_1} \bigwedge \dots \bigwedge dx^{i_p}$, здесь $(p!)T_{i_i\dots i_p} = \Omega_{i_i\dots i_p}$.

Совокупность всех дифференциальных форм — ассоциативная алгебра, т.е. формы можно складывать и перемножать внешним образом, операция умножения билинейна.

Заметим, что можно рассматривать формальные суммы дифференциальных форм разных рангов, например: $a + 3dx^1 + 2dx^2 \bigwedge dx^4$.

Обозначим $\Omega^*(X)$ — алгебра бесконечно дифференцируемых дифференциальных форм. В каждой точке имеем:

$\bigwedge^* \mathbb{R}^n_x$ — полная внешняя степень касательного пространства.

$\bigwedge^p \mathbb{R}^n_x$ — внешняя степень ранга p.

$\bigwedge^* = \sum\limits_{i=0}^{n} \bigwedge^p \mathbb{R}^n_x$, $\dim \bigwedge^p = C^p_n = \binom{p}{n}$.

Укажем некоторые свойства этой алгебры:

1. $1 \in \Omega^*$.

2. В локальных координатах имеются базисные элементы dx^i, функциональные коэффициенты $f(x)$.

3. Правила умножения: $dx^i \bigwedge dx^j = -dx^j \bigwedge dx^i$;
   $fdx = dx\ f$.

Ввиду таких простых правил часто в анализе теорию дифференциальных форм излагают независимо.

Имеется единственный инвариантный дифференциальный оператор d, определенный на формах.

Remark Все годится для форм с комплексными значениями.

Вообще, можно строить теорию со значениями в том поле, которое содержит значения координат.

Итак,

Definition $d: \Omega^i(X) \to \Omega^{i-1}(X)$ — *линейный оператор, т.ч.*

1. $d(f(x)) = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

2. $d(dx^{i_1} \bigwedge \dots \bigwedge dx^{i_p}) = 0$.

3. $d(f\Omega) = df \bigwedge \Omega + fd\Omega$, *где* $f \in C^\infty(X)$.

Чтобы непротиворечивость системы аксиом 1)-3) была очевидной, можно считать, что в случае 3) $\Omega = dx^{i_1} \bigwedge \dots \bigwedge dx^{i_p}$, *тогда свойство имеет вид:* $d(f\Omega) = df \bigwedge \Omega$.

Lemma *Оператор d со свойствами 1)-3) существует и единствен.*

Proof $\Omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_p} \Omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$.

Тогда по линейности $d\Omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_p} d\Omega_{i_1\ldots i_p} \bigwedge dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$.

Очевидно, это снова дифференциальная форма ввиду правил внешнего умножения. Т.о. есть единственность, а явный вид формулы дает существование.

Заметим, что использована ассоциативность умножения: $dx^i \bigwedge dx^{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge dx^{i_p}$. *Здесь $i_1 < \ldots < i_p$, но i может не удовлетворять этому условию. Тогда придется его несколько раз переставить, не обращая внимания на расстановку скобок. Это и есть ассоциативность.*

Theorem *1. $\Omega_1 \bigwedge \Omega_2 = (-1)^{pq} \Omega_2 \bigwedge \Omega_1$, где p — ранг Ω_1, q — ранг Ω_2.*

2. $d(\Omega_1 \bigwedge \Omega_2) = (d\Omega_1) \bigwedge \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \bigwedge d\Omega_2$.

Proof 1. $e_1 \cdots e_p e_{p+1} \cdots, e_{p+q}$ — пусть порождают линейное пространство. Рассмотрим базис $e_{p+1} \cdots e_{p+q} e_1 \cdots e_p$. Тогда ориентация перехода от одного базиса к другому есть $(-1)^{pq}$. Это очевидно из рассмотрения транспозиций.

Это же рассуждение применяется к

$$dx^{i_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_p} \bigwedge dx^{j_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_q}.$$

Подобное рассуждение часто встречается при взятии прямой суммы ориентированных пространств в том и другом порядке.

2. Очевидно, утверждение справедливо для форм вида

$$(dx^{i_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{i_p}) = \Omega_1, \ (dx^{j_1} \bigwedge \cdots \bigwedge dx^{j_q}) = \Omega_2.$$

Так что все дело в умножении на числовую функцию. Именно она подвергается нетривиальному дифференцированию.

Пусть верно для Ω_1 и Ω_2; докажем для $f\Omega_1$ и $g\Omega_2$, где f, g — функции. Тогда все будет доказано.

Упражнение. Проделайте это доказательство.

Ясно, откуда берется $(-1)^p$: придется p раз переставить дифференциал.

Примеры: Рассмотрим в пространстве электрическое и магнитное поля. На частицу заряда e действует сила в классическом обозначении $f = e\,\vec{E} + e\,[\vec{H} \times \frac{\vec{V}}{C}]$. $\vec{E}$, $\vec{H}$ — электрическое и магнитное поля. На самом деле, сила

— ковектор, значит, E — ковектор, а H — кососимметрический тензор ранга 2.

$$f_i(x) = eE_i + eH_{ij}\frac{Vj}{C},\ H_{ij}(x) = -H_{ji}(x).$$

Векторное произведение указывает на наличие кососимметричного тензора, если результат — ковектор. В евклидовой метрике разработано сопоставление:

$$H_{12} \to H^3,\ H_{23} \to H^1,\ H_{13} \to H^2.$$

При ортогональном преобразовании с определителем +1 законы преобразования не отличаются. Отличие чувствуется, если сделать преобразование с определителем -1. Поэтому физики назвали вектор магнитного поля "аксиальным". Еще пример тензора второго ранга: угловая скорость.

Законы Фарадея-Максвела:

$$H = \sum_{i<j} dx^i \bigwedge dx^j,\ x = (x^1, x^2, x^3),\ E = E_i(x)dx^i.$$

1. $dH = 0$.
2. $dE = -\frac{1}{C}\frac{\partial H}{\partial t}(H_{ij} = H_{ij}(x,t))$.

Эти законы не зависят от метрики.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{3,1}$ с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3), $x^0 = ct$. (Это делается для согласования размерностей.)

Минковский дал геометрическую трактовку СТО.

В природе до изучения микромира встречаются только электромагнитные и гравитационные силы, они имеют геометрическую структуру.

Положим $F(x) = E_i dx^i \bigwedge dx^0 + \sum\limits_{i<j} H_{ij} dx^i \bigwedge dx^j;\ i, j = 1, 2, 3.$

Упражнение: Законы 1) и 2) равносильны свойству $dF = 0$ (замечание Лоренца).

Электромагнитное поле замкнуто. Этот простейший закон природы требует лишь простейших геометрических структур. Т.е. электромагнитное поле — самая грубая физическая структура.

Theorem $d \cdot d = 0$.

Proof Достаточно доказать, что $d(df) = 0$, где f — функция. Имеем: $\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$, $d(\varphi_i(x)dx^i) = \sum\limits_{i<j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}\right)(dx^i \bigwedge dx^j)$. Подставив $\varphi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, получим 0 из-за симметрии частных производных.

Дифференциальные формы изобрел Пуанкаре, решая задачи об автоморфных функциях и гамильтоновых системах небесной механики. Геометрическая формализация создана А.Картаном и де Рамом.

Мы видим, что много есть замкнутых форм, например это любая точная форма, вида dA. В односвязной области евклидова пространства замкнутые и точные формы совпадают. Насколько замкнутых больше, чем точных — определяется топологией области.

Пример. $d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}$, здесь d — просто обозначение, а не дифференциал, т.к. φ — не функция (это многозначная функция) на $\mathbb{R}^2\backslash 0$. Надо выкинуть кривую, содержащую 0 и уходящую в бесконечность, чтобы φ стало однозначной функцией (упражнение).

Теперь переходим к метрике. Пусть на многообразии в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ задана метрика

$$g_{ij}(x) = g_{ji},\ g(x) = \det g_{ij}(x) \neq 0.$$

Definition *Замена координат сохраняет ориентацию, если якобиан положительный.*

Definition *Многообразие называется ориентированным, если в атласе все замены сохраняют ориентацию.*

Примеры неориентируемых многообразий — лист Мебиуса и проективная плоскость.

Будем считать, что многообразие X ориентируемо.

Упражнение: любое одномерное многообразие ориентируемо.

Lemma *Пусть X — ориентированное многообразие с метрикой. Тогда $g'(x(y)) = J^2 g(x(y))$, где $J = \frac{\partial x}{\partial y}$.*

Proof Это очевидно из закона преобразования матриц квадратичных форм $G' = J^* G\, J$.

А тогда $\Omega = \sqrt{g(x)}dx^1 \bigwedge \cdots \bigwedge dx^n$ — дифференциальная форма. Она называется элементом объема на ориентированном многообразии.

Пример. Метрика в 4-мерном пространстве. $(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Векторы классифицируются на пространственноподобные (скалярный квадрат < 0), временеподобные (скалярный квадрат > 0), световые $(= 0)$.

Материальная точка живет по кривой, у которой касательные вектора только временеподобны. Тогда у таких кривых есть длина. Каков ее смысл? Это время жизни.

Упражнение. Сравнить времена жизни вдоль разных траекторий.

Присутствие метрики позволяет из формы ранга k получить инвариантно форму ранга $n - k$.

Риманову геометрию можно рассматривать как язык описания пространственно-временной реальности. Одно из первых применений этого языка внутри математики — топология.

15.11.93
Лекция 8

Риманова кривизна.

Классическая кривизна кривой и поверхности — достаточно простое понятие. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и евклидовой метрикой $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Пусть для простоты $n = 2$, $(x^1, x^2) = (x, y)$.

Рассмотрим кривую $x(t), y(t)$, $t = s$ — натуральный параметр, т.е. кривая запараметризована длиной. Кривизной кривой называется абсолютная величина ускорения $k = |\frac{d^2\vec{x}}{ds^2}|$ $(\forall n)$. Бывает кривизна кривой со знаком, но это только в плоскости:

k> 0 k< 0

Можно еще представлять кривизну следующим образом: выберем в точке кривой локальную систему координат, где ось x // кривой. Тогда $ds = dx'$ при $x = x_0$. Тогда $k = -f''_{xx}|_{x=x_0}$, где график f совпадает с кривой в этой локальной системе.

Смотри в классическом курсе формулы Френе.

Теперь рассмотрим двумерную поверхность в трехмерном пространстве, выберем локальную систему координат x, y, z, т.ч. поверхность задается как $z = f(x, y)$, ось $z\perp$ поверхности. Тогда имеем $z'_x = z'_y = 0$. Во втором приближении поверхность задается квадратичной формой с матрицей $b_{ij} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})|_{x^0, y^0}$, где $(x^1, x^2) = (x, y)$.

Эта форма называется второй квадратичной формой поверхности. Посмотрим, как выглядит риманова метрика поверхности. Во-первых, она индуцирована метрикой пространства. Длину касательного вектора поверхности легко найти: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т.е. $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Так что система координат характеризуется тем, что риманова метрика евклидова: $g_{ij} = \delta_{ij}$, а вторая квадратичная форма имеет вид: $b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ (в точке x_0, y_0).

Поскольку один индекс поднимается при помощи метрики, инвариантно определены собственные числа — главные кривизны. Детерминант называется гауссовой кривизной. Псевдосфера — верхняя часть гиперболоида — в пространстве Минковского имеет метрику Лобачевского и называется в физике массовой поверхностью. Это есть реальное применение геометрии Лобачевского в физике, в отличии от "углов большого треугольника".

Очевидно, гауссова кривизна $k = k_1 k_2$. У прямой нет внутренней геометрии. Геометрия возникает из-за вложения в пространство. Аналогично k_1, k_2 — не имеют инвариантного смысла. А гауссова кривизна — имеет и вычисляется только через риманову метрику самой поверхности.

В трехмерном пространстве k не изменит знак при изменении ориентации оси z.

k> 0 k< 0

Задача (Максвела). Берега острова уходят круто вниз. Тогда число пиков + число впадин - число перевалов = 1.

В анализе вторая квадратичная форма в критических точках называется формой Гессе.

Итак, кривизна — тривиальное понятие вроде ускорения.

Идея Римана: твердое тело — репер, геометрия создается телами за счет сил, воздействующих на репер. Надо объехать замкнутый путь репером, сравнить начальное и конечное положение. Результат измерения и есть кривизна.

Уже греки были недовольны постулатом параллельных. (Это если выражаться на языке математической логики.) На тензорном языке нельзя говорить о параллельности в разных точках. Вообще, векторы по-разному переносятся по разным кривым при наличии римановой метрики. Идея параллельного переноса лежит в основе понятия кривизны.

Итак, рассмотрим многообразие M с координатами $x^1, \ldots, x^n$, метрикой $g_{ij}(x)$. Пусть $T = (T^i(x))$, $i = 1, \ldots, n$ — векторное поле.

Рассмотрим объект $T^i_{,k} = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k}$. Он — не тензор. Если есть замена координат $x(y)$, где $y = (y^1, \cdots, y^n)$, то $T'^j = T(x(y))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. У тензоров типа (1,1) тоже есть свой закон преобразования. $T'^j_{,s} = \frac{\partial T'^j(x(y))}{\partial y^s}$ — не совпадает с тензорным законом. (А, например, $\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}$ — кососимметрический тензор, но единственный из частных производных I порядка для ковекторного поля. У векторного поля вообще не составишь тензора без метрики). Итак, пока что нет анализа тензорных, в частности векторных полей. Вывод: дифференцирование тензора не есть наивное дифференцирование в локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим $\mathbb{R}^N_x$ — N-мерное пространство, зависящее от x. Например, годится любое тензорное пространство или его подпространство. Вообще говоря, это пример векторного расслоения или расслоенного пространства. Например, в случае вложенного многообразия можно рассмотреть ортогональное дополнение к касательному пространству. Основной пример — пространство касательных векторов, т.е. $N = n$. Рассмотрим функцию f, т.ч. $f(x) \in \mathbb{R}^N_x$. Например, векторное поле. Мы хотим построить анализ таких функций. Наивный подход $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ плох, т.к. $f(x)$, $f(x+h)$ в различных пространствах. Нужна разумная операция параллельного переноса касательных векторов, хотя бы на бесконечно малое расстояние.

Пример $f(x)$, $n = 1$. Если считать, что числовая прямая в каждой точке x своя, это уже вопрос — параллельный перенос скаляров, эти идеи Вейля оказались важны для описания магнитного поля.

Для двумерных поверхностей кривизна оказывается одной функцией. В трехмерном случае — это тензор 4 ранга.

Рассмотрим касательное пространство $\mathbb{R}^N_x$ многообразия M^n с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим набор функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, т.ч. $\forall$ векторного поля $T(x) = T^i(x)$. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}(x)T^j(x)$ — тензор. Набор Γ^i_{jk} называется символами Кристоффеля или геометрической связностью многообразия.

При аффинных преобразованиях, очевидно Γ^i_{jk} преобразуются как тензоры.

Из нашего условия, что указанный объект — тензор, можно выписать закон преобразования для Γ^i_{jk}. Для простоты можно начать с такой системы, в которой $\Gamma = 0$. В криволинейной системе Γ уже не будут равны 0.

Definition *Пусть в каждой локальной системе координат задан набор числовых функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, т.ч. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}T^j(x)$ — тензор (1,1). Тогда набор $\Gamma^i_{jk}(x)$ называется геометрической связностью (или символами Кристоффеля.) Указанная операция называется операцией инвари-*

антного дифференцирования.

$\nabla_k T = \partial_k T + \hat{\Gamma}_k T$, *где* $\hat{\Gamma}_k$ *— линейный оператор.*

В таком виде понятно, как обобщать дифференцирование на другие тензорные поля. При дифференцировании получаются тензоры более высоких рангов. В одномерном случае линейный оператор — умножение на число. Так что можно инвариантно дифференцировать функции. Ковариантные производные, в отличие от обычных, не коммутируют.

Пример: $n = 1$.

$$[\nabla_k, \nabla_l] = \nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k = \frac{\partial \Gamma^k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l}{\partial x^k}$$

— вообще не дифференциальный оператор.

Операция параллельного переноса в одномерном случае нетривиаль на, если от точки к точке меняется базис.

В физике электромагнитное поле задает ковариантное дифференцирование комплекснозначных функций.

Указанный при $n = 1$ коммутатор называется римановой кривизной. Т.е. риманова кривизна измеряет некоммутирование ковариантных производных.

Lemma *Символы Кристоффеля преобразуются по закону:*

$$\tilde{\Gamma}^p_{qr}(y) = \underbrace{\Gamma^i_{jk}(x(y)) \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \frac{\partial x^k}{\partial y^s}}_{\text{это как у тензоров}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^q \partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial x^i}$$

Упражнение. Докажите эту очевидную лемму.

Заметим, что для аффинного преобразования останется только тензорная часть.

Нелинейные замены координат естественны для механики сплошной среды, где нужно дифференцировать тензорные поля.

Чем характеризуется евклидова геометрия? Ковариантные производные будут коммутировать и во всех остальных системах координат (если в евклидовой были 0).

Упражнение. Превратите лемму в определение.

Риманова метрика определяет единственным образом некоторый естественный способ ковариантного дифференцирования, а именно:

1. Скаляры дифференцируются обычным образом.
2. $\nabla_k(T'T'') = (\nabla_k T')T'' + T'(\nabla_k T'')$. (формула Лейбница).
3. Ковариантное дифференцирование коммутирует со сверткой.

Theorem 1. *Существует единственная операция ковариантного дифференцирования любых тензоров со свойствами 1)-3), если только есть для векторов.*

2. *Существует и единственна операция ковариантного дифференцирования на римановом многообразии со свойствами 1)-3) и*

3. $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$

4. $\nabla_k g_{ij} = 0$

$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = T^i_{jk}$ — тензор кручения данной связности.

Связность, о которой говорится в теореме, называется римановой (кристоффелевой связностью). Для $n = 2$ риманова кривизна совпадает с гауссовой.

22.11.93. лекция 9

Дифференциальное исчисление на гладких многообразиях

Нетрудно дифференцировать функцию: $\nabla_k f = (\frac{\partial f}{\partial x^k})$ — ковектор. Но в случае произвольного тензора $\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$ — не тензор. Хотелось бы при дифференцировании от тензора типа (p,q) перейти к тензору типа $(p,q+1)$.

Идея — подобрать добавку $D^{(i)}_{(j)}$, чтобы в результате получился тензор. Эта добавка, очевидно, не единственна; как найти ее естественным образом?

Рассмотрим простейший случай векторов. $\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk} T^p$. Γ^i_{pk} — символы Кристоффеля — преобразуются не по тензорному, а по другому закону: $z \to z'$, тогда $\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}})$.

Заметим, что символы Кристоффеля не единственны, можно добавить тензор той же валентности. Набор символов Кристоффеля на всем многообразии называется аффинной связностью, ковариантным дифференцированием или параллельным переносом. Операция ∇_k — взятие ковариантной производной. Построение ковариантной производной тензоров высоких порядков должно удовлетворять следующим естественным свойствам: коммутирование со сверткой, на произведении действует формула Лейбница, производная функции равна градиенту.

Theorem *Аффинная связность единственным образом задает такое ковариантное дифференцирование тензоров ∇_k, что:*

1. ∇_k *— линейный оператор;*
2. $\nabla_k f = (\frac{\partial f}{\partial x^k})$.
3. $\frac{\partial}{\partial x^k}(T^i T_i) = (\nabla_k T^i)T_i + T^i(\nabla_k T_i)$.
4. $\nabla_k(R^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)}) = (\nabla_k(R^{(i)}_{(p)})S^{(j)}_{(q)} + R^{(i)}_{(p)}(\nabla_k S^{(j)}_{(q)})$.

   При этом ковариантная производная равна:

5. $$\begin{aligned}\nabla_k T^{(i)}_{(j)} &= \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{jj_2\cdots j_q}\Gamma^j_{j_1 k} - \cdots - T^{(i)}_{j_1\cdots j_{q-1}j}\Gamma^j_{j_q k} + \\ &\quad + T^{i,i_2\cdots i_s}_{(j)}\Gamma^{i_1}_{ik} + \cdots + T^{i_1\cdots i_{p-1},i}_{(j)}\Gamma^{i_p}_{ik}.\end{aligned}$$

Proof Из свойства 3) можно вывести вид ковариантной производной для ковекторов.

Для произвольного тензора $T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_q}$.

Воспользовавшись свойствами 1)-4), получим 5). Тем самым доказали и существование, и единственность.

Имея ковариантную производную, можно дифференцировать тензор по направлению вектора: $\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T$.

Посмотрим, как переносится вектор по кривой в обычной евклидовой плоскости:

$$\frac{dT^i}{dt} = 0; \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{\partial T^i}{\partial x^k} = 0.$$

Последнюю формулу можно перенести на многообразие как определение, если заменить производную на ковариантную.

Definition *Поле векторов на кривой параллельно, если*

$$\frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_k T^i = 0.$$

Пусть кривая рассматривается при $0 \leq t \leq 1$. $T^i(0)$ — начальный, $T^i(1)$ — конечный векторы.

Definition $T^i(1)$ *параллелен* $T^i(0)$ *вдоль* $x(t)$, *если есть поле параллельных вдоль кривой векторов с началом* $T^i(0)$, *концом* $T^i(1)$. *Или:* $T^i(1)$ — *результат параллельного переноса* $T^i(0)$ *вдоль* $x(t)$.

Всегда ли можно определить результат параллельного переноса? Для этого надо решить дифференциальное уравнение $\frac{dT^i}{dt} + (\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk})T^j = 0$. Решение этого уравнения существует локально и при достаточно гладком Г глобально. Параллельный перенос — линейный оператор из касательного пространства в начале кривой в касательное пространство в конце кривой.

В элементарной геометрии перенос — преобразование, сохраняющее расстояния и углы. Рассмотрим случай метрики g_{ij}.

Definition *Связность согласована с метрическим тензором ("риманова" в случае риманова метрического тензора), если* $\nabla g_{ij} = 0$.

Theorem *Если* $\det g_{ij} \neq 0$, *то существует единственная согласованная связность, для которой* $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, *где*

$$\Gamma^k_{ij} = 1/2 g^{kl} (\frac{\partial g l_j}{\partial x^i} + \frac{\partial g_i l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}) \ (*)$$

Proof $\nabla_k g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{l_j} \Gamma^l_{ik} + g_{il} \Gamma^l_{jk}$.

Переставим индексы циклически:

$$\frac{\partial g_i k}{\partial x^i} = g_{lk} \Gamma^l_{ji} + g_{jl} \Gamma^l_{ki},$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = g_{li} \Gamma^l_{kj} + g_{kl} - \Gamma^l_{ij}$$

Суммой и разностью этих соотношений получается $(*)$.

Насколько полученные понятия метрики, связности, переноса согласуются с геометрической интуицией? Метрика нужна для поднятия и опускания индексов – отождествления векторов и ковекторов, матриц и квадратичных форм и т.п.

Задачи:

1)Ковариантное дифференцирование согласовано с опусканием индексов.

2) Если связность согласована с метрикой, то при параллельном переносе сохраняется скалярное произведение $S^i(t)$ на $T^i(t)$.

Недостаток связности — она не тензор. Попробуем составить комбинации, являющиеся тензорами.

Тензор кривизны:

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk} - \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql}.$$

Тензор кручения:

$$T^p_{kl} = \Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk}$$

Задача

1. R, T — тензоры. (Для T очевидно).

2. (Теорема). $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = -R^i_{qkl} T^q + T^p_{kl} \frac{\partial T^i}{\partial x^p}$.

Выясним геометрический смысл тензора кривизны. Рассмотрим три векторных поля ξ, η, α.

Положим

$$[T(\xi, \eta)]^i = T^i_{kl} \xi^k \eta^l; \ [R(\xi, \eta) \alpha] = R^i_{jkl} \xi^k \eta^l \alpha^j.$$

Задача

1. $T(\xi,\eta)=\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi-[\xi,\eta]$.

2. $R(\xi,\eta)\alpha=\nabla_\eta\nabla_\xi\alpha-\nabla_\xi\nabla_\eta\alpha+\nabla_{[\xi,\eta]}\alpha$

Здесь $[\xi,\eta]=\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}$ — скобка Ли векторных полей.

Зафиксируем ξ,η . Тогда по полю α получим новое поле, т.е. имеем оператор на векторных полях. В точке получим автоморфизм касательного пространства. Он устроен так: возьмем контур в касательной площадке к ξ,η ; обнесем по нему α. Разность результата и исходного вектора разделим на площадь контура и устремим к 0. Получим предельный вектор, т.е. результат измеряет отличие касательной плоскости от евклидовой.

Это ковариантное определение продолжается в сложных ситуациях.

Идея доказательства: правая часть равенства линейно зависит от векторных полей. Остается проверить на базисных полях.

В дальнейшем считаем, что кручение равно 0.

При помощи метрики опустим вниз индекс кривизны.

$R_{iqkl}=g_{ip}R^p_{qkl}$ — риманов тензор кривизны.

Скалярная кривизна $R=g^{ql}R^i_{qli}$. Риманова кривизна обладает многими симметриями:

$$R_{iqkl}=-R_{qikl};\ R_{iqkl}=R_{kliq}(\text{задача}).$$

Задача. Существует локальная карта, в которой

$$g_{ij}=\delta_{ij}=1/3R_{ikjl}x^kx^l+E_{ikjl}x^kx^l\ ,\ \text{где } E\to0 \text{ при } x\to0.$$

Эта карта получается экспоненциальным отображением касательной плоскости:

геодезическая

Проектируем геодезическую на плоскость с сохранением длины. Так и получим карту.

Пример. Рассмотрим поверхность в трехмерном пространстве. Из-за симметрии первые и вторые два индекса римановой кривизны должны быть разными. Поэтому с точностью до знака все равно R_{1212}.

Поверхность локально задана как график $z=f(x,y)$. Тогда:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + df^2, \; g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j},$$

где $z' = x, \; z^2 = y$.

Если подставить g в формулы, получим $R_{1212} = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ — гессиан.

Этот тензор зависит от системы координат, но скалярная величина не зависит, она равна: $R = 2\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 2 \times$ гауссова кривизна.