Квадратный корень

1. Квадратный корень Рассмотрим уравнение $x^2 = a$, где $a \in (-\infty; \infty)$. Выясним количество решений этого уравнения в зависимости от значений a. Для этого построим график функции $y(x) = x^2$. Возможны три случая:

1) если $a < 0$, то прямая $y = a$ не пересекает график;

2) если $a = 0$, то прямая $y = a$ имеет одну точку пересечения с графиком функции, а именно, при $x = 0$;

3) если $a > 0$, то прямая $y = a$ пересекает график в двух точках, симметричных относительно оси Oy.

Соответственно, мы можем сделать вывод, что при $a < 0$ уравнение не имеет корней, при $a = 0$ — один корень $x = 0$, при $a > 0$ существуют два корня x_1 и x_2, причём $x_1 = -x_2$.

Вообще говоря, это рассуждение нельзя считать доказательством, поскольку график функции $y(x) = x^2$ мы строим по нескольким точкам, а дальше соединяем плавной кривой. При этом мы предполагаем, что график является непрерывной кривой, но, чтобы доказать это, нам не хватает знаний. Поэтому пока нам придётся предполагать, что это так, и основывать на этом все дальнейшие рассуждения.

Определение. Квадратным корнем из действительного числа a называется любое решение уравнения $x^2 = a$.

Другими словами, квадратный корень — это любое число, квадрат которого равен . Например, квадратные корни из четырёх — это 2 и -2, а квадратных корней из -9 не существует. Как мы уже выяснили, квадратные корни можно извлекать только из неотрицательных чисел, причём, если корни существуют, то один из них сам является неотрицательным числом и имеет особое значение:

Определение. Арифметическим квадратным корнем из действительного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Обозначается $\sqrt{a}$.

Таким образом, квадратными корнями из четырёх являются числа $\pm\sqrt{4}$, или ± 2.

Обратите внимание, что по нашим предыдущим рассуждениям арифметический квадратный корень можно извлечь из любого неотрицательного числа, например, из двух! То есть существует число, которое в квадрате даёт 2. Что же это за число? Давайте попробуем его найти.

Для этого покажем, что, если $0 \le y_1 < y_2$, то $0 \le \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$.

Во-первых, пусть $0 \le x_1 < x_2$. Понятно, что если мы меньшее число умножим на меньшее, а большее — на большее, то неравенство только усилится, т. е. $x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2$. Значит, если $0 \le x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$.

Предположим, что $\sqrt{y_2} > \sqrt{y_1}$. Тогда $(\sqrt{y_2})^2 > (\sqrt{y_1})^2$, т. е. $y_2 > y_1$, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и $\sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$.

Доказанное свойство хорошо видно на графике $y(x) = x^2$. При положительных x чем больше значение аргумента, тем больше значение функции, и наоборот.

Это значит, что если мы хотим сравнить между собой два корня, достаточно сравнить их квадраты.

Вернёмся к $\sqrt{2}$. Поскольку $1 < 2 < 4$, т. е. $1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2$, то и $1 < \sqrt{2} < 2$. Значит, это некоторое число между единицей и двойкой. Попробуем определить, какая у этого числа первая цифра после запятой в десятичной записи. Для этого переберём все числа на отрезке $[1; 2]$ с одной цифрой после запятой и рассмотрим их квадраты. Оказывается, $1,4^2 = 1,96 < 2 < 1,5^2 = 2,25$. Следовательно, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Т.е $\sqrt{2} = 1,4\ldots$. Дальше, переберём все числа на отрезке $[1,4; 1,5]$ с шагом $0,01$. Оказывается, что $1,41^2 = 1,9881 < 2 < 1,42^2 = 2,064$. Значит, $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Далее, $1,414^2 = 1,999396 < 2 < 1,415^2 = 2,002225$. И так далее. Продолжая действовать таким образом, получим, что $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots$. На первый взгляд непохоже, чтобы эта дробь когда-нибудь закончилась. По крайней мере понятно, что можно написать программу, которая будет вычислять значение этого корня до какой-то определённой цифры после запятой. Возможно, что эта дробь является бесконечной и непериодической.

2. Решение задач

4.24абв, 4.25авеж, 4.27авеж, 4.4а, 4.12в, 4.13а, 4.17а, 4.19абв, 4.21ав, 4.22ав, 4.23аг

3. Домашнее задание 4.6(у), 4.7(у), 4.8ежз, 4.13, 4.22бг, 4.23бв.