Занятие 5 (17/09/2007)
Метод математической индукции

Теорема **1.** *Пусть дана бесконечная последовательность утверждений (т.е. бесконечный ряд утверждений, занумерованных натуральными числами): $У_1$, $У_2$, $У_3$, ..., где $У_i$ — i-е утверждение. Пусть также выполняются следующие два условия:*
1) (база) $У_1$ истинно;
2) (шаг) каким бы ни было натуральное число k, коль скоро $У_k$ истинно, то обязательно и $У_{k+1}$ истинно.
Тогда все утверждения в данной последовательности истины.

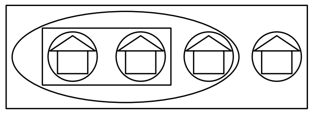
Эта теорема называется принципом математической индукции, а метод решения задач с его помощью — методом математической индукции.

2.1. На веревочном кольце нанизано N обручей разного размера. Обручи пронумерованы от 1 до N в порядке возрастания размера, причем i-й обруч проходит сквозь j-й тогда и только тогда, когда $j - i > 1$. Докажите, что в каком бы порядке они изначально не располагались на веревке, их можно упорядочить по возрастанию размера.

2.2. В компании из k человек ($k \geq 4$) каждый узнал по новому анекдоту. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им анекдоты. Докажите, что за $2k - 4$ разговоров все смогут узнать все новые анекдоты.

2.3. Число $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ является точным квадратом.

2.4. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что, переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.



2.5. В посёлке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали одну и ту же совокупность домов?

2.6. Число $x + \frac{1}{x}$ целое. Докажите, что число $x^{2007} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2007}$ тоже целое.

2.7. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

2.8. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что каждое не превышает своего номера ($ak \leq k$) и сумма всех чисел — чётное число. Докажите, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ равна нулю.

2.9. Докажите, что существует бесконечное число пар таких соседних натуральных чисел, что разложение каждого из них содержит любой простой сомножитель не менее чем во второй степени. Примеры таких пар чисел: $(8, 9)$, $(288, 289)$.

2.10. Занумеруем колышки в задаче о Ханойской башне числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится шагов для перекладывания n дисков, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й или наоборот запрещено? (Каждое перекладывание должно производится через 2-й колышек. Как и раньше, больший диск нельзя класть на меньший.)