

Теорема Менелая

1. Точки К и М лежат на сторонах АВ и ВС треугольника АВС, причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку В проведена прямая l , параллельная АС. Прямая КМ пересекает прямую l в точке L, а прямую АС – в точке N. Найдите BL и CN, если $AC = a$.

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает стороны АВ и ВС треугольника АВС

соответственно в точках C_1 и A_1 , а продолжение стороны АС – в точке B_1 . Тогда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Обратная теорема. Пусть на сторонах АВ и ВС треугольника АВС отмечены соответственно точки C_1 и A_1 , а на продолжении стороны АС – точка B_1 . Тогда если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Теорема Чебы (retake). На сторонах ВС, СА и АВ треугольника АВС отмечены точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Тогда прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

2. Докажите теорему Чебы для случая, когда точка A_1 лежит на стороне ВС, а точки B_1 и C_1 – на продолжениях соответствующих сторон
3. Дан треугольник АВС. На продолжении стороны АС за точку С взята точка N так, что $CN = 3 AC$. Точка К лежит на стороне АВ, причем $AK : KB = 1 : 3$. В каком отношении прямая KN делит сторону ВС?
4. Дан треугольник АВС. Точка Р лежит на стороне АВ, точка Q – на стороне ВС, причем $AP : PB = 2:5$, $BQ : QC = 6$. Отрезок PQ пересекает медиану ВМ в точке R. Найдите BR:RM.
5. На медиане AD треугольника АВС взята такая точка M, что $AM : MD = 1 : 3$. В каком отношении прямая ВМ делит сторону АС?
6. Отрезки NA и KB – биссектрисы треугольника KMN, а биссектриса внешнего угла при вершине M пересекает прямую KN в точке С. Докажите, что точки А, В, С лежат на одной прямой.

Домашнее задание

7. Докажите теорему Менелая для случая, когда все три точки: A_1 , B_1 и C_1 , лежат на продолжениях соответствующих сторон.
8. Дан треугольник АВС. На продолжении стороны АС за точку С взята точка N так, что $AC = 2 CN$. Точка М лежит на стороне ВС, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону АВ?
9. В трапеции ABCD основание AD в три раза больше, чем ВС. Точка М делит сторону CD в отношении $CM : MD = 1 : 2$. Определите, в каком отношении отрезки AM и BD делятся точкой их пересечения.
10. На диагонали АС параллелограмма ABCD отмечена такая точка М, что $AC = 3CM$. Прямая ВМ пересекает сторону CD в точке N. Точка Т делит сторону ВС в отношении $BT : TC = 5:2$. В каком отношении отрезки TN и АС делятся их точкой пересечения?
11. Точка Р делит сторону АС треугольника АВС в отношении $AP : PC = 5 : 1$, точка S делит сторону АВ в отношении $AS : SB = 4 : 3$, Точка D отложена на продолжении стороны ВС, причем $BD : BC = 2 : 3$. Прямая PS пересекает отрезок AD в точке К. Найдите $AK : KD$ и $PS : SK$.