Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-12 27 октября 2009 г.

Подобие и степень точки

Пусть точка M находится на расстоянии d радиуса R. Проведем через M прямую, пересекающую данную окружность в точках A и B. На спецкурсе с помощью принципа Карно доказано, что произведение $MA \cdot MB$ равно d^2-R^2 и не зависит от выбора прямой. Это произведение, взятое со знаком «+» для точек вне окружности и со знаком «-» для точек внутри окружности, называется ***степенью точки*** *M относительно данной окружности.*

Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд. *Произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны.*

Обратная теорема. *Отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Тогда если $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Теорема о произведении отрезков секущих. *Произведение всей секущей на ее внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.*

Обратная теорема. *На одной стороне неразвернутого угла с вершиной M отмечены точки A и B, а на другой – C и D. Если $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Теорема о квадрате касательной и секущей. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной. (Другими словами, степень точки, взятой вне окружности, равна квадрату касательной)*

Обратная теорема. *Точка M находится на продолжении хорды AB, C – точка окружности. Если $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC – касательная.*

1. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 1:2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.
2. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один – в точках B и C, другой – в точках D и E. Известно, что AB = BC = 7, AD = 10. Найдите DE.
3. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
4. Даны окружность S и точки A и B вне ее. Для каждой прямой l, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

Домашнее задание

5. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.
6. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления проведена окружность, высекающая на основании AC хорду MK. Найдите MK, если AB = BC = 3, AC = 4.
7. Из точки M, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная MA (A – точка касания) и секущая, внутренняя часто которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите MA.
8. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 11 и 8. Найдите неизвестные стороны треугольника.
9. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-13 30 октября 2009 г.

Подобие в окружности-2

1. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K – точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если BD = 3, а площади треугольников CMB и AMD относятся как 1 : 4.
2. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Известно, что $BC = 3 \cdot MN$ и AB = 12. Найдите AN.
3. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 4, 6 и 7 проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключенный между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD, причем хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если CB=a, BD=b.
5. а) Диагональ AC вписанного в окружность четырехугольника ABCD является биссектрисой угла BAD. Докажите, что прямая BD отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник.
   б) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC =4, AK =6.
6. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой: $\boxed{l^2=ab-a_cb_c}$. Запомните формулу!