

Композиция движений

Определение. Преобразование, состоящее в последовательном выполнении двух преобразований F_1 и F_2 , называется их **композицией** и обозначается $F_2 \circ F_1$.

Теорема 1. Композиция преобразований ассоциативна.

Теорема 2. Композиция движений является движением.

Пример. Какое движение является композицией: а) двух параллельных переносов; б) двух поворотов с общим центром?

Аксиома подвижности Для любой пары лучей OA и O_1A_1 и примыкающих к ним полуплоскостей α и α_1 существует единственное движение, отображающее луч OA на луч O_1A_1 , а полуплоскость α на полуплоскость α_1 .

Теорема 3 (о трех гвоздях). Три точки, не лежащие на одной прямой, и их образы однозначно задают движение.

- а) Какое движение является композицией двух центральных симметрий?
б) Докажите, что каждый параллельный перенос можно представить в виде композиции двух центральных симметрий, причем центр одной из них можно выбрать произвольно.
- а) Докажите, что композицией параллельного переноса и центральной симметрии (в обоих порядках) является центральная симметрия;
б) Каким движением является композиция четного числа центральных симметрий? А нечетного?
- Знайка начертил 2009-угольник $A_1A_2\dots A_{2009}$ и отметил середины его сторон $B_1, B_2, \dots, B_{2009}$. Незнайка стер стороны многоугольника, оставив только отмеченные середины сторон. Сможет ли Знайка восстановить исходный черетез?
- Какое движение является композицией двух осевых симметрий а) с параллельными осями; б) с пересекающимися осями?
- Четное число прямых пересекаются в одной точке. Каким движением будет композиция симметрий относительно этих прямых? Как зависит ответ от порядка прямых?
- На плоскости даны прямые l_1, l_2, \dots, l_{2n} , пересекающиеся в одной точке. Блоха сидит в некоторой точке M плоскости и прыгает через прямую l_1 , попадая в точку M_1 , причём M и M_1 симметричны относительно прямой l_1 , далее — через прямую l_2 и т.д. Докажите, что если через $2n$ прыжков блоха оказалась в точке M , то, начиная движение из любой точки плоскости, через $2n$ прыжков блоха окажется на прежнем месте.
- Коммутативна ли композиция движений?

Задача на 5

- Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, VM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

Домашнее задание.

- Существует ли: а) ограниченная, б) неограниченная фигура на плоскости, имеющая среди своих осей симметрии две параллельные несовпадающие прямые?
- Фигура на плоскости имеет ровно две оси симметрии. Найдите угол между этими осями.
- Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.
- A и B – различные точки. Каким движением будет композиция поворотов: а) $R_A^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}$; б) $R_A^{60^\circ} \circ R_B^{60^\circ}$? *Указание:* выберите удобные точки и примените теорему о 3 гвоздях.
- Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A , а на другой — точка B , причём $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.