Метод координат

Определение. *Отложим от точки О произвольные неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Пару чисел (x, y) называют* ***координатами вектора*** $\vec{c}$.

При этом координаты вектора $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ совпадают с координатами точки С в соответствующей системе координат. Вектор $\overrightarrow{OC}$ называют ***радиус-вектором*** точки С. Если в качестве базиса выбраны взаимно-перпендикулярные векторы единичной длины $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, то систему координат называют ***ортонормированной*** или ***декартовой***.

- Пусть даны точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- Длина вектора $\vec{c} = (c_1, c_2)$ вычисляется по формуле $|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.
- Формула расстояния между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Координаты середины отрезка: если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, M – середина отрезка AB, то $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Какие из перечисленных формул верны только в декартовой системе координат, а какие – и в косоугольной?

1. !!! Как найти косинус угла треугольника по координатам его вершин?
2. !!! Пусть точка С делит отрезок AB в отношении AC : CB = λ: (1-λ). Выразите координаты точки С через координаты точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.
3. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Найдите координаты точки пресечения медиан треугольника ABC.
4. Докажите, что точки A(3; 2), B(2; 5) и C(4, –1) лежат на одной прямой.
5. Даны точки A(–5; 2) и B(1; 3). Найдите координаты такой точки C, что OACB – параллелограмм, где O – начало координат. Найдите также площадь этого параллелограмма.
6. Даны точки A(5; –1), B(4; –8) и C(–4; –4). Найдите координаты ортоцентра треугольника ABC.

Домашнее задание

7. Докажите, что точки A(4; 1), B(8; 7), C(11; 8) и D(13; 4) являются вершинами трапеции и найдите длину ее средней линии.
8. Даны две вершины равностороннего треугольника A(–3; 4) и B(5; 0). Найдите: а) координаты третьей вершины; б) площадь треугольника.
9. Вершины треугольника ABC имеют координаты: A(–1; 1), B(2; 4) и C($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$). Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.
10. Дан прямоугольник ABCD. Докажите, что для любой точки M выполняется равенство $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
11. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из чисел ac+bd, ae+bf, ag+bh, ce+df, cg+dh, eg+fh неотрицательно.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-38 7 апреля 2010 г.

Уравнения прямой

$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ – общее уравнение прямой.

$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$, где (a, b) – координаты направляющего вектора; $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0$, где (a, b) – координаты нормального (перпендикулярного) вектора

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ уравнение прямой «в отрезках», $(p; 0)$ и $(0; q)$ – точки пересечения с осями координат

Пусть даны прямые $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Тогда $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$,

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Если φ - угол между l_1 и l_2, то $\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Расстояние от точки M(x_0, y_0) до прямой $l : ax + by + c = 0$ равно $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1. Получите уравнение прямой «в отрезках».
2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (-3; 2) и: а) параллельной; б) перпендикулярной прямой 2x – 6y + 1 = 0.
3. Найдите расстояние между параллельными прямыми y = –3x+5 и y = –3x–4.
4. Даны точки A(5; –1), B(4; –8) и C(–4; –4). Найдите: а) уравнение прямой CB; б) уравнение прямой, содержащей высоту AD; в) найдите длину этой высоты.
5. Две прямые: 8x + 4y + 1 = 0 и 3x – 2y – 4 = 0 образуют четыре угла. Напишите уравнение прямой, содержащей биссектрису того из этих углов, который содержит начало координат.

Домашнее задание

6. На плоскости расположены два квадрата ABCD и BKLN так, что точка K лежит на продолжении AB за точку B, N лежит на луче BC. Найдите угол между прямыми DL и AN.
7. Даны точки A(–1; 2), B(3; –1) и C(0; 4). Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.
8. Найдите косинус угла между прямыми 2x – 5y – 4 = 0 и x + 3y – 3 = 0
9. Вершины треугольника ABC имеют координаты A(0; 4), B(3; 0) и C(-3;0). Напишите уравнение прямой, содержащей биссектрису угла ACB.
10. В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Найдите AC и BC, если AB = 8, BH = 5, HC_1 = 4.

Задача на 5

11. Решите задачу 6 геометрически, без применения координат.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-39 13 апреля 2010 г.

Уравнение окружности

Уравнение окружности: $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$.

1. Докажите, что линия $x(x + 2) = y(4 – y)$ является окружностью. Найдите ее радиус и координаты центра.
2. Напишите уравнение окружности с центром M(6; 7), касающейся прямой 5x – 12y – 24 = 0.
3. Напишите уравнение касательных к окружности $x^2 + y^2 – 10x – 4y + 25 = 0$, проведенных из начала координат.
4. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки A(3; 0) и B(–1; 2), центр которой лежит на прямой x + y + 2 = 0.
5. На диагоналях AC и BD квадрата ABCD взяты соответственно точки M и K такие, что CM·BK = AB^2. Докажите, что точка пересечения прямых CK и BM расположена на окружности, описанной около квадрата.
6. На окружности отмечены точки A и B. Докажите, что если точка C движется по данной окружности, то центр тяжести треугольника ABC движется по окружности втрое меньшего радиуса.

Домашнее задание

7. Напишите уравнение окружности, проходящей через три точки: A(2; 2), B(–4; 2) и C(3; 1).
8. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата имеет одно и то же значение.
9. В треугольнике ABC угол C прямой, BC = 8, AB = 10, отрезок BE – биссектриса треугольника. Найдите медиану EF треугольника ABE.
10. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Точки A_1, B_1, C_1 делят его стороны в одинаковом отношении: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Докажите, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны.
11. Даны точки A(0; 0) и B(0; 3). Найдите геометрическое место таких точек M, что MB = 2MA.