Разные задачи. Список №1. Срок сдачи до 31 октября.

1) Найдите наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{m-1}x_m$, если все x_i неотрицательны, а их сумма равна 1.

2) В каждой клеточке прямоугольной таблицы написано либо число 1, либо число -1. Известно, что каждое число встречается как минимум дважды, строк более одной и столбцов более одного. Докажите, что найдутся два столбца и две строки, такие, что сумма четырёх чисел на их пересечении равна нулю.

3) Из вершины прямого угла B треугольника ABC опущена высота BO. Докажите, что ее длина равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и ABC.

4) Из Златоуста в Миасс выехали одновременно "ГАЗ", "МАЗ" и "КамАЗ". "КамАЗ", доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил "МАЗ" в 18 км, а "ГАЗ" — в 25 км от Миасса. "МАЗ", доехав до Миасса, тоже сразу повернул назад и встретил "ГАЗ" в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

5) Квадрат разрезан на 36 квадратиков. Один из них единичный, а остальные равны между собой, но не единичные. Найдите площадь исходного квадрата.

6) Найдите наибольшее n такое, что для всех натуральных $1 \leqslant k \leqslant n$ число k^k делит 2009!.

7) В каждой клетке шахматной доски стоит белый или чёрный король. Известно, что каждый король бьёт больше королей чужого цвета, чем своего. Может ли чёрных и белых королей быть не поровну?

8) В скачках участвуют три лошади. На одну из них ставки принимаются в отношении 1 : 4 (то есть, если лошадь приходит первой, поставленную на неё сумму возвращают и дают ещё 4 раза по столько, а если не первой, то ставка пропадает), на вторую 1 : 3 и на третью 1 : 1. У меня есть £100. Могу ли я так поставить, чтобы выиграть при любом исходе забега?

9) Восемь команд играют турнир по футболу, каждая с каждой. Все матчи договорные: игроки договорились, что каждая команда в своем первом матче забьет 1 гол, во втором 2 гола, в третьем 3 и т. д., в последнем 7. Какое минимальное количество матчей в этом турнире может закончиться вничью?

10) Через середину боковой стороны трапеции проведите прямую, разбивающую его на два равновеликих четырехугольника.

11) Докажите, что если число $\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}$ целое, то число $\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)}$ тоже целое.

12) Точка D на катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана так, что высота CH этого треугольника делит отрезок BD пополам. Точка E на катете BC треугольника ABC выбрана так, что высота CF треугольника BCD делит отрезок DE пополам. Докажите, что $AB || DE$.

13) Однажды архивистами была обнаружена обложка олимпиадной работы школьника. Самой работы не нашли, не сохранились и условия задач. На обложке стояли результаты трёх проверок:

1	2	3	4	5	6
$\mp$	$\pm$	$\pm$	$+$	$+/2$	$-$
$+$	$\mp$	$+/2$	$\pm$	$\mp$	$-$
$\mp$	$\mp$	$\pm$	$\pm$	$+$	$+/2$

Известно, что работу проверяли Иванов, Петров и Сидоров (неясно, в каком порядке). Известно также, что Иванов всегда правильно проверяет геометрические задачи, Петров если где и ошибётся, то только в геометрии, а Сидоров проверяет всё правильно, только он очень рассеянный и порой ставит оценки не в те колонки.

Восстановите результаты школьника.

14) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BIC лежит на биссектрисе треугольника ABC, исходящей из вершины A.

15) На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.