

## Зачёт №2. Программа.

1) **Матожидание.** Случайная величина, распределение, математическое ожидание (среднее значение) случайной величины.

2) **Аддитивность.** Матожидание суммы двух случайных величин равно сумме матожиданий каждой из них.

3) **Мультипликативность.** Матожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению матожиданий каждой из них.

4) **До первого орла.** Монету бросают до первого выпадения орла. Какое в среднем количество бросков нужно сделать?

5) **Рассеянный солдат.** Солдат срочной службы написал письма  $n$  своим любимым девушкам, написал  $n$  конвертов с адресами и случайным образом разложил письма по конвертам. Сколько девушек в среднем получат адресованное себе письмо?

6) **Пробки.** По узкой дороге в одном направлении едут  $n$  машин. Вначале скорости всех машин различны, а порядок машин на шоссе случаен. Каждая машина едет с постоянной скоростью, пока не догонит едущую впереди, после чего едет со скоростью передней машины. В результате через достаточно большое время машины разбиваются на несколько групп. Найдите среднее значение числа групп.

7) **Кодирование.** Кодирование без потерь. Префиксные и непrefиксные коды. Код Хаффмана. Если  $l_i$  — длина  $i$ -го кодового слова в словаре  $C$  и  $\sum_{i \in C} 2^{-l_i} > 1$ , то код не префиксный.

8) **Теорема Карно.** Теорема Карно: Пусть на стороны треугольника  $ABC$  или на их продолжения опущены перпендикуляры из трёх произвольных точек: из  $A_1$  на прямую  $BC$ , из  $B_1$  на прямую  $AC$  и из  $C_1$  на прямую  $BA$ . Тогда эти перпендикуляры пересекаются в одной точке если и только если  $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$ .

9) **Двойственность Карно.** Если перпендикуляры, опущенные из точек  $A', B', C'$  на стороны, соответственно,  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A, B, C$  на стороны, соответственно,  $B'C', A'C', A'B'$  треугольника  $A'B'C'$ , также пересекаются в одной точке.

10) **Степень точки.** Для точки, удалённой на расстояние  $a$  от центра  $O$  окружности радиуса  $R$ , число  $a^2 - R^2$  равно произведению (направленных) отрезков от этой точки к точкам пересечения с окружностью любой проведённой через неё секущей.

11) **Радикальная ось.** Точки, имеющие равные степени относительно двух неконцентрических окружностей, образуют прямую (радикальную ось этих окружностей). Примеры. Радикальный центр.

12) **Окружности на чевианах.** В треугольнике  $ABC$  проведены чевианы  $AA'$  и  $BB'$  и на них, как на диаметрах, построены окружности. Тогда прямая, содержащая общую хорду этих окружностей, проходит через ортоцентр треугольника  $ABC$ .

13) **Критерий коцикличности.** К окружности с центром  $O$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$ , а также через  $A$  проведена произвольная секущая, пересекающая окружность в точках  $K$  и  $L$ . Точка  $M$  — середина  $BC$ . Тогда  $\angle MLO = \angle MKO$ .

14) **Комплексные числа.** Комплексные числа, арифметические операции с комплексными числами. Модуль, сопряжение. Геометрическая интерпретация. Свойства модуля, сопряжённых чисел и арифметических операций.

15) **Комплексные числа и преобразования.** Прибавление комплексного числа — сдвиг, умножение на комплексное число — поворот с растяжением. При перемножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

16) **Корни из единицы.** Формула Муавра. Корни из единицы.