Инверсия – 1.

1. Инверсия.

Зададим в плоскости окружность ω с центром O и радиусом R. *Инверсией* плоскости относительно окружности R называется такое преобразование этой плоскости, при котором каждая точка M, отличная от точки O, отображается на точку M', лежащую на луче OM и удовлетворяющую условию $OM \cdot OM' = R^2$. Окружность ω называется *окружностью инверсии*, точка O — *центром инверсии*, а радиус R — *радиусом инверсии.*

Точки, расположенные на окружности инверсии, при этом остаются на месте, расположенные внутри нее переходят вовне, а расположенные вне круга инверсии переходят во внутренние точки круга. Плоскость как бы "выворачивается" через окружность инверсии. Точка О в инверсии не участвует; в таких случаях говорят, что рассматривается проколотая плоскость. Иногда, наоборот, рассматривают плоскость, пополненную бесконечно удаленной точкой — образом центра инверсии. Она принадлежит всем прямым, замыкая их в окружности бесконечно большого радиуса.

Преобразованием, обратным инверсии, является та же инверсия. Такие преобразования называют *инволютивными.*

Упражнение 1. Какие из известных вам преобразований плоскости инволютивны?

2. Построение образа точки.

Пусть точка M расположена внутри окружности ω. Восставим в точке M перпендикуляр к прямой OM, на пересечении его с ω отметим точку A. Касательная к окружности в точке A пересекает луч OM в точке M'. Это и есть образ точки M.

Упражнение 2. Обоснуйте это построение.

Упражнение 3. Как построить образ точки, расположенной вне окружности инверсии?

3. Образы прямых и окружностей.

1) *Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.*

2) *Прямая, не содержащая центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.* Для доказательства рассмотрим произвольную точку M этой прямой и ее образ M' и воспользуемся подобием треугольников OAM и $OM'A'$.

Упражнение 4. Как построить образ прямой при инверсии? Подумайте, какие случаи расположения прямой надо рассмотреть.

Упражнение 5. Постройте образ квадрата, описанного вокруг окружности инверсии.

3) *Окружность с диаметром OA, содержащая центр инверсии O, переходит в прямую, перпендикулярную OA.*

Упражнение 6. Постройте образ окружности, которая содержит центр инверсии, если она: а) пересекает окружность инверсии; б) касается окружности инверсии; в) расположена внутри окружности инверсии.

Упражнение 7. Постройте образ окружности, концентрической окружности инверсии.

4) Осталось выяснить, во что перейдет окружность, не содержащая центр инверсии. Пусть S — ее центр, AB — диаметр, принадлежащий линии центров OS, M — произвольная точка этой окружности. Тогда $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OM \cdot OM'$. Поэтому, во-первых, $\triangle OMA \sim \triangle OM'A'$, откуда $\angle OMA = \angle OA'M'$ (1). А во-вторых, $\triangle OMB \sim \triangle OM'B'$, откуда $\angle OMB = \angle OB'M'$, а значит, и $\angle BMM' = \angle M'B'A'$ (2).

Заметим теперь, что угол AMB прямой. С учетом (1) и (2), отсюда следует, что угол $A'M'B'$ также прямой. Это означает, что точка M' принадлежит окружности с диаметром $A'B'$. Итак, *образом окружности, не содержащей центр инверсии, является окружность, также не содержащая центр инверсии.*

Замечание. Из равенства $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следует, что окружность и ее образ гомотетичны относительно центра инверсии. Их центры расположены на одной прямой с центром инверсии.

Таким образом, доказана

Теорема. *Образом прямой или окружности при инверсии является прямая или окружность.*

Замечание. На пополненной плоскости различие между прямыми и окружностями исчезает: прямые считаются окружностями бесконечно большого радиуса. Таким образом, *окружности при инверсии пополненной плоскости переходят в окружности.*