9 математический класс **1 января 2010 года.**

Всех поздравляем с наступившим Новым 2010 годом!
Удач, радости, новых открытий!

Разные задачи. Список №4. Срок сдачи до 31 января.

1) По кругу написано несколько целых чисел. Каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 2010. Сколько чисел написано?

2) CD — биссектриса треугольника ABC. Вписанная окружность треугольника BCD и описанная окружность треугольника ABC концентричны. Найдите углы треугольника ABC.

3) Сумма четырёх натуральных чисел равна 2010. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

4) Докажите, что если сторона остроугольного треугольника видна под одинаковым углом из его точки пересечения медиан, точки пересечения биссектрис и точки пересечения высот, то этот треугольник равносторонний.

5) Докажите, что $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{2009}{2010!}<1$.

6) Разность двух квадратных трёхчленов не имеет действительных корней, а каждый из них корни имеет. Докажите, что сумма этих квадратных трёхчленов имеет действительные корни.

7) Квадратный пол со стороной 4 м разделён на 16 клеток со стороной 1 м. На полу лежит 13 ковриков, каждый из которых накрывает ровно две клетки. Коврики застилают пол целиком. Докажите, что можно убрать один коврик так, что пол останется застеленным.

8) На полянке лежат в ряд, касаясь друг друга, 2010 одинаковых круглых брёвен, сплошь вымазанных дёгтем. В ложбинку между первыми двумя кладут такое же, но чистое бревно. Потом его перекатывают без проскальзывания через другие брёвна, пока оно не окажется в ложбинке между последними брёвнами. Какая часть боковой поверхности бревна измажется дёгтем?

9) Найдите все натуральные числа-палиндромы, которые остаются палиндромами после прибавления к ним числа 2010. (Число называется палиндромом, если оно слева направо и справа налево читается одинаково.)

10) При каких целых a уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет целый корень?

11) На краю круглого стола Никита разложил 2010 конфет так, что между любыми соседними конфетами были равные промежутки. Только он отвернулся, как Миша стащил 1205 конфет. Докажите, что Никита сможет из оставшихся конфет выбрать три, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

12) В школе число мальчиков равно числу девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

13) Из вершины B параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры на прямые AD, CD и AC. Докажите, что их основания и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат на одной окружности.

14) Дана белая доска 2010×2010 клеток. Двое по очереди закрашивают клетки синей краской. Начинающий игру каждым своим ходом закрашивает квадрат 2×2, а второй игрок — "уголок" из трёх клеток. Повторно красить клетки нельзя. Проигрывает не имеющий хода. Кто, первый или второй, победит независимо от игры соперника?

15) Четыре окружности расположены по кругу так, что каждые две соседние пересекаются в двух точках (всего 8 точек пересечения — четыре "внешние" и четыре "внутренние"). Известно, что четыре внешние точки лежат на одной окружности, на которой лежат ещё и центры всех четырёх окружностей. Докажите, что четыре внутренние точки лежат в вершинах прямоугольника.