9 математический класс **15 января 2010 года**

Задача Аполлония.

Помещаем круглую клетку в заданную точку пустыни, входим в нее и запираем изнутри. Производим инверсию пространства по отношению к клетке. Теперь лев внутри клетки, а мы — снаружи.
Г. Петард, "Другие математические способы охоты"

Постановка задачи. Эта лекция посвящена одной-единственной задаче. Ее решение содержалось в не дошедшем до нас сочинении Аполлония "О касаниях". Позже ее исследовали многие математики, включая Леонарда Эйлера.

Аполлоний (ок. 260-170гг. до н.э.) родился в г. Перга — греческой колонии в Малой Азии. Его сочинения об эллипсе, гиперболе и параболе легли в основу теории алгебраических кривых, а применяемый метод привел Декарта и Ферма к созданию метода координат.

Формулируется задача Аполлония коротко и ясно: *Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.* Ясность кажущаяся. Во-первых, из-за неоднозначности взаимного расположения трех окружностей (даже для двух уже 5 случаев!) Во-вторых, одна, две или все три окружности могут иметь нулевой радиус (являясь точкой). В-третьих, радиус любой окружности может быть и бесконечным (тогда окружность превращается в прямую). Все это порождает много частных случаев. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Общую же задачу можно решать по-разному, сводя к тому или иному частному случаю.

Упражнение 1. Как формулируется и решается задача Аполлония, если все три окружности вырождаются в точки? А если в прямые? Сколько решений может иметь задача в зависимости от расположения таких "окружностей"?

Ответ на вопрос о количестве решений зависит от того, допускать ли в качестве искомой окружности вырожденные случаи: прямую и точку. Заметим теперь, что невырожденные окружности могут касаться как внутренним, так и внешним образом. Поэтому задача Аполлония может иметь до 8 решений.

Упражнение 2. Проверьте последнее утверждение для окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, а все три радиуса достаточно малы.

Инверсия позволяет упрощать задачу Аполлония за счет превращения окружности (а лучше — двух!) в прямую. При этом важно, что инверсия сохраняет касание окружностей и прямых. Рассмотрим два примера.

Пример 1.*Построим окружность, касающуюся данной окружности и проходящую через две данные точки.* Анализ. Искомая конфигурация содержит две касающиеся окружности. Перевести их инверсией в две параллельные прямые мешает незнание точки касания. Зато есть целых два способа превратить в прямую одну из окружностей.

Первый способ. Рассмотрим инверсию относительно какой-нибудь точки, принадлежащей данной окружности. При этом данная окружность перейдет в прямую. Задача сводится к построению окружности, проходящей через две данные точки и касающейся данной прямой. После чего останется лишь повторно применить инверсию — и лев пойман!

Второй способ. При инверсии относительно одной из данных точек искомая окружность перейдет в прямую, касательную к образу данной.

Пример 2. *Решим задачу Аполлония для случая, когда две окружности из трех данных касаются.* Рассмотрим инверсию с центром в точке касания. При ней пара касающихся окружностей перейдет в пару параллельных прямых, а третья — в окружность или прямую. Осталось построить окружность, касающуюся всех трех образов.

Упражнение 3. Проведите исследование последнего примера. Всегда ли задача имеет решение? Сколько? Сопоставьте возможные конфигурации до и после инверсии.