9 математический класс **1 февраля 2010 года.**

Разные задачи. Список №5. Срок сдачи до 28 февраля.

1) Целые числа m, n и k подобраны так, что $k^2 - n^2 - m^2 = 2(m-n)(k-m+n)$. Докажите, что $\sqrt{2nm}$ — целое число.

2) В лесу живут волки, зайцы и комары. Некоторые из них всегда говорят правду, прочие всегда врут. Каждого спросили: 1) "Ты волк?" (60% утвердительных ответов), 2) "Ты заяц?" (40% утвердительных ответов), 3) "Ты комар?" (30% утвердительных ответов). Сколько процентов лгунов в лесу?

3) AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки G и F на AC выбраны так, что $C_1F||BC$ и $A_1G||AB$. Докажите, что A_1, C_1, G и F лежат на одной окружности.

4) Докажите для всех $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ неравенство $\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5) Два пятизначных числа приписали одно к другому. Оказалось, что получившееся десятизначное число делится на произведение исходных пятизначных чисел. Найдите исходные числа.

6) На стороне BC ромба $ABCD$ удалось выбрать точку E так, что $AE = CD$. Описанная окружность треугольника AEB пересекает отрезок ED в точке F. Докажите, что A, F и C лежат на одной прямой.

7) Пятеро сыграли круговой турнир по шахматам. Андрей выиграл ровно дважды, Боря играл только вничью, Вася проиграл только занявшему последнее место, Гена набрал на пол-очка больше, чем Дима. Сколько у кого очков?

8) На плоскости нарисован квадрат. Миша измерил расстояния от некоторой точки плоскости до его вершин и получил 1 км, 4 км, 7 км, 8 км. Докажите, что он ошибся.

9) В графе нет изолированных вершин. Докажите, что вершины можно покрасить в два цвета так, что каждая вершина соединена с какой-то вершиной другого цвета.

10) Произведение различных простых чисел делится на каждое из них, уменьшенное на единицу. Найдите все такие произведения.

11) 10 школьников писало контрольную по геометрии. В это время Татьяна Юрьевна тихонько их фотографировала. Потом она сказала, что в каждый кадр попало ровно два школьника, никакие двое не были сфотографированы дважды и для любой группы из четырёх школьников нашлось ровно три фотографии, где были изображены члены этой группы. Не ошиблась ли Татьяна Юрьевна?

12) Бумажный квадрат разделён линиями, параллельными сторонам, на N прямоугольников. Докажите, что можно провести не более $N-1$ прямолинейных разрезов так, что квадрат распадётся на упомянутые прямоугольники. Разрез не обязан начинаться или кончаться на краю. Части квадрата перекладывать нельзя.

13) Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к каждой из них провели по касательной, а потом в каждой окружности провели по диаметру так, что каждый диаметр параллелен касательной к другой окружности. Докажите, что концы диаметров лежат на одной окружности.

14) Дан многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b — целые. Известно, что у него три целых корня. Докажите, что все они различны (то есть, нет кратных корней).

15) Докажите, что если возможно разбить клетчатый прямоугольник на трёхклеточные уголки, то число способов сделать это чётно.