

Графы – 1. Упражнения.

Многие математические задачи и конструкции можно описать на языке графов. Напомним, что граф состоит из конечного числа **вершин** (их обычно изображают точками). Каждые две вершины графа могут либо находиться между собой в определённом отношении (тогда говорят, что они **соединены ребром**), либо не находиться. Ребро обычно изображают линией, соединяющей две вершины. Эти вершины называются **концами ребра**. Говорят также "ребро исходит из вершины". Количество рёбер, исходящих из данной вершины, называется её **степенью**.

В этом листке несколько задач, требующих подсчёта числа вершин и рёбер.

1) (Важный факт, зато известный и несложный.) Докажите, что в любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

2) В шахматном турнире участвует 17 игроков. Докажите, что в любой момент турнира найдётся кто-то, сыгравший (к этому моменту) чётное число партий.

3) Докажите, что в любом графе с более чем одной вершиной найдутся две вершины одинаковой степени.

4) (Граф Петерсена.) В стране некоторые города соединены авиалиниями. Известно, что из любого города можно вылететь не более, чем в три других. Известно также, что из любого города в другой можно добраться, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное количество городов может быть в этой стране?

5) В графе 1543 ребра. Известно что каждые две смежные вершины имеют ровно одну вершину, смежную с ними обеими. Может ли такое быть?

6) В графе $n \geq 3$ вершин. Известно, что для любой пары вершин, не соединённой ребром найдётся третья вершина, соединённая с ними обеими. Какое минимальное число рёбер может быть в графе?

7) (Двудольный граф) Из цифр 1, 2, ..., 8 требуется составить как можно больше трёхзначных чисел так, чтобы каждое число записывалось различными цифрами и любые два числа пересекались не более чем по одной цифре. Какое максимальное количество чисел удастся составить?

8) Человек называется *малообщительным*, если у него менее десяти знакомых. Человек называется *странным*, если все его знакомые — малообщительные люди. Докажите, что странных людей не больше, чем малообщительных.