**9 математический класс** **1 марта 2010 года.**

# Разные задачи. Список №6. Срок сдачи до 31 марта.

1) Известно, что в течение суток в каждый момент в интернет-кафе были посетители. Каждый посетитель был в кафе всего один раз и находился там меньше часа. Докажите, что можно выбрать 12 посетителей, которые в кафе не встречались.

2) Докажите, что если $\{8x\} = \{15x\}$, то $\{26x\} = \{75x\}$. (Напомним, что $\{a\}$ — *дробная часть* числа $a$, определяемая как разность между $a$ и его *целой частью*, то есть максимальным целым числом, не превосходящим $a$.)

3) Даны три квадратных трёхчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Зато каждый их этих трёхчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трёхчленов равна нулю.

4) Точки $E$, $F$, $K$, $M$ - соответственно середины отрезков $AB$, $CD$, $AD$, $AK$ в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, прямые $AF$, $CM$, $BK$, $DE$ пересекаются в одной точке $O$. Докажите, что площадь четырехугольника $BOFC$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

5) В комнате находятся $n$ человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Один из находящихся в комнате сказал: "В этой комнате $k_1$ лжецов", второй: "В этой комнате $k_2$ лжецов", …, $n$-ый: "В этой комнате $k_n$ лжецов". Известно, что все числа $k_1$, …, $k_n$ не превосходят $n$. Каково наибольшее возможное значение их суммы?

6) По окончании двухкругового шахматного турнира оказалось, что все участники набрали поровну очков. Докажите, что найдутся два участника, которые одержали поровну побед белыми. (Любые два участника сыграли между собой по две партии: каждый одну партию белыми, а другую черными. Напомним, что за победу в шахматах дают 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0.)

7) Напишите несократимую дробь, равную $\frac{12345678\ldots87654321}{123456789\ldots987654321}$. (В числителе 2000 восьмёрок, в знаменателе 1999 девяток.)

8) Можно ли расставить натуральные числа в клетках шахматной доски так, чтобы в каждой паре соседних (имеющих хотя бы одну общую вершину) клеток одно из чисел делилось на другое, а для каждой пары несоседних клеток такого не было?

9) Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. На диагонали $AC$ выбрана точка $K$ и построена хорда $EF$ с серединой в точке $K$. Точка $M$ — проекция $A$ на $BE$, точка $N$ — проекция $C$ на $DF$. Докажите, что $K$ лежит на прямой $MN$.

10) Докажите, что для любых положительных $a$ и $b$ выполняется неравенство $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{5}{2\sqrt{ab}}$.

11) Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Точки $M$ и $N$ – середины отрезков $BC$ и $AH$ соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой $MN$ с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине $A$ равно $AH$.

12) На фестиваль военно-морской песни приехали хоры из 100 стран. Каждый хор исполняет три песни и сразу уезжает домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из стран-участниц. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трёх оскорбительных для его страны песен.

13) Найдите все натуральные $n$, для которых $n! + 3n^2$ – квадрат натурального числа.

14) В треугольнике $ABC$ $\angle B = 30°$, $\angle C = 20°$. Точки $D$ и $E$ на сторонах $BC$ и $AC$ соответственно таковы, что $AC = DC$, $EC = BD$. Найдите $\angle EBC$.

15) Ариша и Кир играют в игру, ставя по очереди фишки в клетки доски $5 \times 5$: Ариша — белые фишки (она начинает игру), а Кир — чёрные. Каждая фишка ставится на свободную клетку. Нельзя ставить фишку на клетку, у которой фишками твоего цвета заняты все соседние клетки (по стороне). Проигрывает не имеющий хода. Кто — Кир или Ариша — победит при наилучшей игре?