Планарность.

1. **Укладка на поверхности.**

Будем говорить, что граф укладывается на поверхности S, если его можно изобразить на S таким образом, чтобы его рёбра не пересекались. Области, на которые граф, уложенный на S, делит S, называют ***гранями***.

Граф, который можно уложить на плоскости, называется ***планарным***. Например, граф K_4 ("конверт") планарен — одну из диагоналей можно пустить снаружи от конверта. Граф же K_5 не планарен, что мы докажем ниже.

С точки зрения укладки графов сфера и плоскость — одно и то же. Если граф уложен на сфере, можно положить эту сферу на плоскость, выбрав точку касания так, чтобы диаметральная ей точка N (она называется ***северным полюсом***)не принадлежала графу (то есть, была внутренней точкой одной из граней). Далее для любой точки X графа рассматривают луч $[NX)$. Его пересечение с плоскостью считается образом точки X. Построенное отображение (оно называется ***стереографической проекцией***) переводит любой граф на сфере в плоский граф, причём грань, содержащая северный полюс, переходит во внешнюю область графа. Понятно, что преобразованием, обратным стереографической проекции, можно, напротив, любой граф на плоскости перевести в такой же граф на сфере.

2. **Формула Эйлера.**

Эйлеру принадлежит исторически первый результат, относящийся к укладке графов на сфере и плоскости.

Теорема (Л. Эйлер, 1736) Пусть связный граф, уложен на плоскости или сфере, V — число его вершин, E — рёбер и F — граней. Тогда $V - E + F = 2$.

Доказательство. Индукция по числу рёбер. Для связного графа с одним ребром $V = 2$, $E = 1$ и $F = 1$, так что всё верно. Пусть соотношение доказано для всех графов с n рёбрами. Рассмотрим граф, в котором $n + 1$ ребро. Если в этом графе есть висячая вершина (вершина степени 1), удалим её вместе с ребром, выходящим из неё. При этом, очевидно, останется связный граф с n рёбрами. Однако, число $V - E + F$ не изменится, поскольку и E, и V уменьшатся на 1, а F не поменяется. То есть и для нашего графа с $n + 1$ рёбрами $V - E + F = 2$.

Пусть теперь нет висячей вершины. Тогда наш граф — не дерево (у дерева как минимум две висячие вершины есть всегда). Это значит, что у нас в графе есть цикл. Удалим любое ребро этого цикла. Получится связный граф с n рёбрами. Однако, и в этом случае число $V - E + F$ не изменится, поскольку и F, и E уменьшатся на 1, а V не поменяется. То есть и для нашего графа с $n + 1$ рёбрами $V - E + F = 2$.

При проведении шага индукции мы не опирались на то, что граф расположен именно на плоскости или на сфере. Это учитывалось только при доказательстве базы. То есть, величина $V - E + F$ для связного графа на любой поверхности постоянна (если определена, то есть граф делит поверхность на грани). Эта величина для сферы и плоскости равна 2, а для тора, например, равна 0. Её называют ***эйлеровой характеристикой*** поверхности.

3. **Простейшие непланарные графы.**

Есть известная головоломка: нарисованы три дома и три колодца. Требуется проложить от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.

Эта головоломка неразрешима. С точки зрения теории графов неразрешимость означает, что полный двудольный граф $K_{(3,3)}$ не планарен. Также не планарен и полный граф K_5 на пяти вершинах, о чём говорилось выше. Это можно доказать с использованием тегремы Эйлера.

Пусть, например, K_5 уложен на плоскости. У него $V = 5$, $E = 10$, а тогда $F = 7$. В K_5 нет мостов (рёбер, удаление которых нарушает связность графа), поэтому границей любой грани служит цикл. Всякая грань как минимум треугольна, то есть общее количество сторон граней не менее $3F = 21$. При этом каждое ребро посчитано дважды, то есть $E \geqslant \frac{21}{2}$. Но $E = 10$, так что имеем противоречие.

Пусть теперь $K_{(3,3)}$ уложен на плоскости. У него $V = 6$, $E = 9$, а тогда $F = 5$. В $K_{(3,3)}$ также нет мостов и границей любой грани служит цикл. Но треугольных граней в двудольном графе быть не может, так что каждая грань как минимум четырёхгольна, то есть общее количество рёбер не менее $\frac{4F}{2} = 10$. Однако, $E = 9$, так что снова имеем противоречие.

Понятно, что если какая-то часть графа устроена как пятиугольник с диагоналями K_5 или "три дома, три колодца" $K_{(3,3)}$, то этот граф не планарен, ибо даже только эту часть уложить нельзя. Поразительно, но эти два запрещённых графа исчерпывают список причин непланарности — если таких частей в графе нет, он планарен! Эту теорему доказал в 1927 году известный советский математик Лев Семёнович Понтрягин, но не опубликовал. Независимо от Понтрягина в 1930 году доказательство нашёл и впервые напечатал польский математик Казимир Куратовский. Первые доказательства теоремы Понтрягина-Куратовского были очень сложными. Сравнительно простое доказательство нашёл в 1997 г. петербургский школьник Юрий Макарычев.

4. **Теорема Эйлера и платоновы тела.**

Вершины, рёбра и грани есть не только у графа, но и у многогранника. Именно для многогранника и сформулировал Эйлер свою теорему. При этом графу многогранника (этот граф обычно называют ***скелетом*** многогранника) очевидно соответствует граф на сфере — достаточно "раздуть" многогранник так, чтобы его поверхность стала сферической. Нам теорема Эйлера поможет установить, сколько бывает в природе платоновых тел, то есть правильных многогранников.

Мнгогогранник правильный, если все его грани равны, и в каждой вершине сходится поровну граней. Таков, например, куб или правильный тетраэдр. Граф правильного многогранника однородный (степени всех вершин равны), а все его грани имеют одинаковое число сторон. Понятно, что каждому правильному многограннику соответствует свой граф. Древние математики знали пять правильных многогранников или платоновых тел: тетраэдр, куб (или гексаэдр), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Других нет. В древности отсутствие других платоновых тел объясняли тем, что на небесном своде есть ровно пять планет (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн), а каждое платоново тело соответствует планете. Мы же приведём другое доказательство того, что других правильных многогранников нет, используя для этого теорию графов.

Каждому гипотетическому правильному многограннику соответствует его скелет. Пусть все вершины этого скелета имеют степень k, а все его грани — m -угольники. Тогда $V = \frac{mF}{k}$, $E = \frac{mF}{2}$. По теореме Эйлера $\frac{mF}{k} + F = \frac{mF}{2} + 2$. То есть, $2mF + 2kF = kmF + 4k$. При $k = 2$ имеем $F = 2$, а m — любое. Это вырожденный случай (плоский m-угольник). Пусть $k = 3$. Тогда получим, что $m = 6 - \frac{12}{F}$. Перебирая различные делители числа 12, находим такие решения: $F = 4$, $m = 3$ (тетраэдр), $F = 6$, $m = 4$ (гексаэдр или куб) и $F = 12$, $m = 5$ (додекаэдр). Полагая $k = 4$, получим $m = 4 - \frac{8}{F}$. Здесь есть только один вариант: $F = 8$, $m = 3$ (октаэдр). При $k = 5$, получим $3m = 10 - \frac{20}{F}$. Здесь тоже только один вариант: $F = 20$, $m = 3$ (икосаэдр). Других вариантов нет: если $k \geqslant 6$, то из исходного соотношения получаем $F = \frac{4k}{2m+2k-km}$. Чтобы F имело смысл, должно быть $2m + 2k - km > 0$, однако это не так: $2m + 2k - km = 4 - (m-2)(k-2)$, и это неположительное число, так как $m \geqslant 3$ и $k \geqslant 6$.

То есть, не просто правильных многогранников, даже однородных графов степени > 2, все грани которых — многоугольники с одинаковым числом рёбер всего пять.