9 математический класс **1 апреля 2010 года.**

Разные задачи. Список №7. Срок сдачи до 30 апреля.

1) Сёма купил калькулятор, на котором есть кнопка "$\star$" — она для любых чисел a и b выполняет операцию $a \star b = 1 - \frac{a}{b}$. Никита выломал из калькулятора все кнопки, кроме этой (и цифры оставил). Сможет ли Сёма теперь сложить два числа? Вычесть? Умножить? Поделить?

2) Идёт по улице компания ребят — пять парней и шесть девушек. Может ли так оказаться, что все девушки знакомы с разным количеством парней, а все парни — с одинаковым количеством девушек?

3) Пусть x_0 — корень уравнения $x^3 + px + q = 0$. Докажите, что $p^2 \geqslant 4x_0 q$.

4) Нарисована полуокружность. Найдите ГМТ — середин всевозможных отрезков с концами на ней.

5) В библиотеке поставили две доски. На одной доске читатель записывает число читателей, которых он застал, войдя в читальный зал, а на другой — сколько читателей оставалось, когда он уходил из библиотеки. Рано утром и поздно вечером читателей в библиотеке не было. Докажите, что за день на обеих досках появятся одни и те же числа (возможно, в другом порядке).

6) Про числа a, b и c известно, что $a + b + c = 1$ и $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел — единица.

7) В государстве некоторые города связаны дорогами, причём какие-то три города связаны дорогами каждый с каждым. На всех дорогах ввели одностороннее движение, но так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что в этом государстве найдётся замкнутый маршрут, состоящий из нечётного числа дорог.

8) Внутри угла с вершиной A расположена окружность. На сторонах угла выбираются точки B и C так, что треугольник ABC содержит окружность. Докажите, что минимальная площадь у такого треугольника будет если отрезок BC касается окружности в своей середине.

9) Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\}$. Докажите, что все значения этой функции меньше 2, но могут быть сколь угодно близки к 2.

10) По кругу стоит 2010 точек, одна из них чёрная, остальные белые. Можно выбрать три соседние точки и изменить их цвет на противоположный. Можно ли за несколько таких операций все точки сделать белыми?

11) Две машины движутся с одинаковой постоянной скоростью по двум пересекающимся дорогам. Инспектор Подберёзовиков желает встать в такой точке, чтобы расстояния от него до обеих машин в любой момент времени были бы равны. Докажите, что инспектор сможет это сделать.

12) Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде разности двух взаимно простых составных чисел.

13) За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

14) На сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно так, что четырёхугольники $APQD$ и $BPQC$ вписаны и равновелики. Найдите PQ, если $AD = a$, $BC = b$.

15) Для каких простых чисел p число $p^2 - p + 1$ является кубом?