Гимназия 1543, 9-В класс, 10 апреля.

Линейные рекуррентные соотношения. Упражнения.

1) Числа Пелля P_n — последовательность, определённая следующим образом: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$. Найдите явную формулу для n-го члена этой последовательности.

2) Числа Генкина G_n — последовательность, удовлетворяющая соотношению $G_n = 4G_{n-1} - 5Gn - 2$. Найдите явную формулу для n-го числа Генкина, если $G_1 = 1$, $G_2 = 3$.

3) Числа Святловского S_n — последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $S_n = 6S_{n-1} - 12S_{n-2} + 8S_{n-3}$. Первые три числа Святловского S_1, S_2 и S_3 равны 1, 4 и 6 соответственно. Найдите формулу для S_n.

Гимназия 1543, 9-В класс, 16 апреля.

Линейные рекуррентные соотношения. Упражнения-2.

1) Найдите явную формулу n-го числа Фибоначчи исходя из того, что многочлен $x^3 - x^2 - x$ является аннулирующим.

2) Найдите формулу n-го члена k-й производной последовательности чисел Фибоначчи.

3) Последовательность Колосова c удовлетворяет разностному уравнению: $D^2c + c = 0$ с начальным условием $c_0 = 2$, $(Dc)_0 = 3$. Найдите c_n.

4) Последовательность Черкасова задаётся следующим образом: нулевой её член равен 1, каждый последующий равен утроенной сумме всех предыдущих, начиная с нулевого. Найдите:

а) формулу n-го члена последовательности Черкасова;

б) n-й член k-й производной последовательности Черкасова.

5) Последовательность Дёмина d_n строится так: первые два её элемента равны 15 и 43; для того, чтобы получить $(n+1)$-й элемент, берут элементы с 1-го до $(n-1)$-й, строят по ним частичные суммы: $p_1 = 0$, $p_{k+1} = (d_1 + d_2 + \ldots + d_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, затем их складывают. Таким образом $d_{n+1} = d_{n-1} + 2d_{n-2} + 3d_{n-3} + \ldots$. Найдите формулу n-го члена последовательности Дёмина.

6) Рассмотрим множество X последовательностей с целочисленным индексом, у которых число ненулевых членов с отрицательным индексом конечно. Докажите, что для любых чисел α и β на множестве X операция $\alpha L + \beta I$ обратима и определите, как выражается n-й элемент последовательности $(\alpha L + \beta I)^{-1}a$ через элементы последовательности a.

7) Последовательность Блинчевского b_n, $n \geqslant 0$ задаётся уравнением $Db - 3b = 1$, где 1 — последовательность из единиц. Найдите явную формулу для b_n, если известно, что $b_0 = 3$. (Подсказка: сперва найдите хотя бы какое-нибудь решение уравнения c, затем удовлетворите условию $b_0 = 3$, воспользовавшись тем, что $D(b-c) - 3(b-c) = 0$.)