Метод масс в геометрии.

1. **Точки, массы, центр масс.**

Пусть даны две точки, A_1 и A_2. Представим себе, что в этих точках сосредоточены положительные массы m_1 и m_2 соответственно. Выберем на отрезке A_1A_2 такую точку C, что $\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Из курса физики (правило рычага Архимеда) известно, что если отрезок A_1A_2 подвесить за точку C, то он будет висеть горизонтально: произведение массы на плечо слева и справа будет одно и то же. Говорят, что C — ***центр масс материальных точек*** A_1 и A_2.

Подобным же образом для трёх вершин треугольника $A_1A_2A_3$, снабжённых массами m_1, m_2 и m_3, внутри треугольника найдётся точка, за которую можно подвесить этот треугольник, и тот будет висеть горизонтально. Например, если все массы равны 1, то точкой C будет точка пересечения медиан. И в этом случае C — центр масс трёх материальных точек.

Перейдём к строгим определениям.

2. **Векторное определение центра масс.**

Пусть даны точки A_1, A_2,… A_n с массами m_1, m_2,… m_n соответственно. Массы здесь — формально приписанные точкам положительные числа. Пусть X — любая точка. Тогда запишем вектор $\overrightarrow{XM} = \frac{m_1\overrightarrow{XA_1}+m_2\overrightarrow{XA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{XA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}$. Точку M будем называть ***центром масс системы материальных точек*** $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$,… $A_n(m_n)$ (Массы принято писать в скобках после точки).

Какое-то дурацкое определение. Ведь если брать разные точки X, то и точки M будут получаться разными?! А вот, оказывается, нет.

Теорема 1 Определение центра масс корректно: точка M не зависит от выбора X.

Доказательство. Возьмём вместо X точку Y. Тогда $\frac{m_1\overrightarrow{YA_1}+m_2\overrightarrow{YA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{YA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n} =$
$= \frac{m_1\left(\overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XA_1}\right)+m_2\left(\overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XA_2}\right)+\dots+m_n\left(\overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XA_n}\right)}{m_1+m_2+\dots+m_n} = \overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{YM}$, так что всё хорошо.

Следствие. Если M — центр масс $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$,… $A_n(m_n)$, то $m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$ Это очевидно. Понятно также и то, что точка M, для которой такое свойство выполнено, и есть центр масс.

Нетрудно проверить, что центр масс из закона Архимеда для двух точек в точности соответствует данному определению. Физическая наглядная конструкция стала математически точной.

3. **Группировка.**

Применение масс для решения задач основано на следующей теореме.

Теорема 2 (о группировке масс). Центр масс системы точек не изменится, если часть из них удалить и добавить их центр масс, нагруженный суммарной массой удалённых точек.

Доказательство. Пусть M — центр масс системы материальных точек $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$,… $A_n(m_n)$. Заменим точки $A_{k+1}(m_{k+1})$, $A_{k+2}(m_{k+2})$,… $A_n(m_n)$ точкой $T(m_{k+1}+m_{k+2}+\dots+m_n)$, где T — центр масс этих точек. Первые же k точек оставим как есть. Надо проверить, что $m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\dots+m_k\overrightarrow{MA_k}+(m_{k+1}+m_{k+2}+\dots+m_n)\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{0}$. Это действительно так, ведь по определению центра масс $\overrightarrow{MT} = \frac{m_{k+1}\overrightarrow{MA_{k+1}}+m_{k+2}\overrightarrow{MA_{k+2}}+\dots+m_n\overrightarrow{MA_n}}{m_{k+1}+m_{k+2}+\dots+m_n}$. При подстановке этого равенства в предыдущее мы получаем верное равенство.

3. **Примеры.**

Пример: теорема о медианах. Докажем, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$, считая от вершин.

Повесим единичные массы на все вершины. Тогда система $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$ заменится на $A(1)$, $M(2)$, где M — середина BC. Эта же система заменится на $T(3)$, где T — точка, лежащая на AM и такая, что $AT:TM=2:1$. Ясно, что T — центр масс исходной системы. Однако для группировки мы могли взять любые две точки, а получили бы всё равно ту же точку $T(3)$. Значит, теорема доказана.

А что, если взять четыре точки единичной массы? Где будет центр масс?

Рассмотрим систему $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$, $D(1)$. Сгруппируем A с B, а C с D. Получим, что центр масс этой системы $T(4)$ — середина средней линии — отрезка, соединяющего середины противоположных сторон AB и CD. А если бы мы сгруппировали A с D и B с C, мы получили бы $T(4)$ как середину другой средней линии. О чём это говорит? Да, да, это известная теорема Вариньона. А если группировать по диагоналям?

Вешая единичные массы на вершины треугольника, мы получаем центр масс в точке пересечения медиан. Но можно его получить и в точке пересечения любых двух чевиан. Пусть, например, на стороне AB треугольника ABC выбрана точка P так, что $AP:PB=2:3$, а на стороне BC — точка Q так, что $BQ:QC=1:5$. Пусть $T=CP\cap AQ$. В каком отношении T делит каждую из чевиан?

Развесим массы в вершинах треугольника так, чтобы T стала центром масс. Для этого при группировке A и B должна получиться P, а при группировке B и C — Q. Начнём с B — её массу удобно взять 10, чтобы она делилась на дальние от неё плечи AP и CQ. Тогда $A(15)$ и $C(2)$. Теперь $Q(12)$ (и $AT:TQ=12:15=4:5$), а $P(25)$ (и $CT:TP=25:2$). На удивление просто.

Центр вписанной окружности (инцентр) треугольника, как и точка пересечения медиан, всегда лежит внутри треугольника. Интересно, какие массы нужно развесить в вершинах треугольника, чтобы центр масс попал в инцентр?