Предел последовательности

Меня ведь не рубли на гонку завели —
Меня просили: "Миг не проворонь ты!
Узнай, а есть предел — там, на краю земли?
И можно ли раздвинуть горизонты?"
В. Высоцкий

Определения предела и предельной точки

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. ***ε-окрестностью*** точки A называется интервал $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$.

1. Докажите, что число x принадлежит ε-окрестности точки A тогда и только тогда, когда $|x-a| < \varepsilon$.
2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   а) Укажите наименьший из номеров членов последовательности, для которых выполняется неравенство $|a_n - 1| < 0,1$;
   б) Верно ли, что ***почти все*** члены последовательности (т.е. все, за исключением, быть может, конечного их числа) отличаются от 1 не более, чем на 0,01?
   в) Докажите, что любая ε-окрестность числа 1 является ловушкой для последовательности (a_n).
   Говорят, что 1 является пределом последовательности $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Пишут $a_n \to 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

   Определение 1. Число A называется ***пределом последовательности*** a_n, если любая ε-окрестность точки A содержит почти все члены этой последовательности.

   Определение 2. Число A называется ***пределом последовательности*** a_n, если любая ε-окрестность точки A является ловушкой для последовательности a_n.

   Определение 3. Число A называется ***пределом последовательности*** a_n, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$$

   Говорят также, что последовательность a_n стремится к A или сходится к A. Последовательности, имеющие предел, называют ***сходящимися***.
3. Объясните равносильность трех определений предела.
4. Докажите, что постоянная последовательность имеет предел. Чему он равен?
5. Докажите, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-10}{3n-7} = \dfrac{2}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,9^n = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
6. Приведите пример немонотонной последовательности, имеющей предел.
7. Существует ли последовательность рациональных чисел, стремящаяся к $\sqrt{2}$?
8. Дайте определение того, что последовательность a_n не имеет предела (является ***расходящейся***). Запишите его с помощью кванторов.
9. Докажите, что следующие последовательности расходятся: а) $a_n = n$; б) $a_n = (-1)^n$.
10. Выберите из следующих последовательностей сходящиеся и назовите их пределы (без формального доказательства):
    а) $0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{4};\ 0;\ \ldots$; в) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{7}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{15}{16};\ \ldots$ д) $a_n = \sin\frac{\pi n}{4}$;
    б) $1;\ \frac{1}{2};\ 1,\ \frac{1}{3};\ 1,\ \frac{1}{4};\ 1,\ \ldots$; г) $0,1;\ 0,19;\ 0,191;\ 0,1919;\ 0,19191;\ 0,191919;\ldots$; е) $a_n = \sin n$.

    Определение 1. Число a называется ***предельной точкой*** последовательности, если любая $\varepsilon-$окрестность числа a содержит бесконечно много членов этой последовательности.

    Определение 2. Число a называется ***предельной точкой*** последовательности, если любая $\varepsilon-$окрестность числа a является кормушкой этой последовательности.

    Определение 3. Число a называется ***предельной точкой*** последовательности x_n, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)(|a_n - a| < \varepsilon)$$

11. Объясните равносильность трех определений предельной точки.
12. Перечислите все предельные точки упомянутых выше последовательностей.
13. Обязательно ли предел последовательности является ее предельной точкой? А наоборот?

14. Может ли предельных точек у последовательности быть: а) 0; б) 1; в) произвольное натуральное число n; г) счетное множество; д) континуум?

15. Сколько предельных точек может быть у монотонной последовательности?

16. *Сколько пределов может быть у последовательности?*

17. Верно ли, что:
а) если некоторый отрезок является кормушкой для последовательности a_n, то никакое число вне этого отрезка не может быть пределом последовательности x_n;
б) если некоторый отрезок является кормушкой для последовательности x_n, то у этой последовательности есть предельная точка;
в) если у последовательности есть единственная предельная точка, то она является пределом этой последовательности;
г) если у последовательности есть две предельные точки, то у нее нет предела;
д) если у последовательности есть две кормушки, то у нее нет предела;
е) если кормушками для последовательности x_n являются все отрезки с центром в точке A и только они, то A — предел последовательности x_n?

18. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть: а) $\mathbb{N}$; б) $[0;\,1]$; в) Q; г) R?

19. Может ли сходящаяся последовательность перестать быть сходящейся, если изменить конечное число ее членов?

20. Последовательность b_n получена из сходящейся последовательности a_n перестановкой членов (возможно, бесконечного их числа). Может ли последовательность b_n: а) сходиться к другому пределу; б) расходиться?

21. Последовательность b_n получена из сходящейся последовательности a_n изменением всех членов с нечетными номерами. Может ли последовательность b_n: а) сходиться к другому пределу; б) расходиться?

22. Докажите, что *подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

23. Докажите, что точка a является предельной точкой последовательности a_n тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность последовательности a_n, сходящаяся к a.

24. Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?

Домашнее задание

25. Для последовательности $x_n = \dfrac{n+100}{5n-1}$ найдите наименьшее натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство: а) $|x_n - 0,2| < 0,01$; б) $|x_n - 0,2| < 0,0001$.

26. а) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Можно ли утверждать, что последовательность a_n сходящаяся? Если да, то найдите ее предел.
б) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = A$. Можно ли утверждать, что последовательность a_n сходящаяся? Если да, то найдите ее предел.

27. Докажите, пользуясь только определением предела, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+1} = 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

28. Укажите все предельные точки последовательностей: а) $x_n = n$; б) $x_n = n \cdot \cos\dfrac{\pi n}{4}$; в) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$; г) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$; д) $x_n = n^{(-1)^n}$; е) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \ldots$.

Предел последовательности — 2

Гимназия 1543 *10-В класс* *25 ноября 2010 г.*

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические свойства пределов

Определение. Последовательность, стремящаяся к нулю, называется ***бесконечно малой***.

Теорема 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность.

Теорема 2. Сумма двух бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности — бесконечно малая последовательность.

29. Существенно ли требование ограниченности в последней теореме?

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда последовательность $b_n = ka_n$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Теорема 5 (о пределе суммы). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда последовательность $c_n = a_n + b_n$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$. *Предел суммы равен сумме пределов.*

30. Докажите, что *предел разности равен разности пределов*, а *предел произведения равен произведению пределов.*

Теорема 6 (о пределе частного). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Тогда последовательность $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$. *Предел частного равен частному пределов.*

Теорема 7 (о пределе корня). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0$. Тогда последовательность $\sqrt{a_n}$ тоже имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}}$. *Предел корня равен корню из предела.*

31. Что можно сказать о сходимости суммы и произведения: а) сходящейся и расходящейся последовательностей; б) двух расходящихся последовательностей?

32. Найдите пределы последовательностей:
а) $x_n = \dfrac{2n-2}{7n+3}$; б) $x_n = \dfrac{1000n}{n^2+1}$; в) $x_n = \dfrac{(3n-8)(5n+4)}{n(6n-1)}$; г) $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-4}$;
д) $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-7n+10}$; е) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

33. Найдите пределы последовательностей:
а) $x_n = \dfrac{2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots+(2n)^2-(2n+1)^2}{3n-2n^2}$; б) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Определение. Последовательность называется ***бесконечно большой*** (стремится к бесконечности), если $(\forall C)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|x_n| > C)$.

34. Сформулируйте определение последовательности, при $n \to \infty$ стремящейся: а) к $+\infty$; б) к $-\infty$.

35. Приведите пример последовательности: а) стремящейся к $+\infty$; б) стремящейся к $-\infty$; в) не стремящейся ни к $+\infty$, ни к $-\infty$, но являющейся бесконечно большой; г) неограниченной, но не бесконечно большой.

36. Докажите, что последовательность x_n, не содержащая нулевых членов, является бесконечно большой тогда и только тогда, когда последовательность $\dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно малой.

37. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, если: а) $|a| > 1$; б) $|a| < 1$.

38. Чему в зависимости от a равен $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+1}{a^n-1}$?

39. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

40. Докажите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.

41. Докажите, что действительное число является рациональным тогда и только тогда, когда оно записывается конечной или бесконечной периодической дробью.

42. Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби: а) $0,(4)$; б) $0,4(63)$.

Домашнее задание

43. Найдите пределы последовательностей:
а) $x_n = 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n - 12$; б) $x_n = \frac{5n^2-4n+3}{6n^2+10n-1}$; в) $x_n = \frac{3n^2+1}{2n+1} - \frac{6n^3}{4n^2-1}$; г) $x_n = \frac{6n+1}{\sqrt{n^2+3n+10}+3n}$;
д) $x_n = \sqrt{(n+1)(n+3)-n}$; е) $x_n = \frac{2^n+3^n+4^n}{4^{n+1}+3}$.

44. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:
а) $x_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots \frac{1}{n(n+1)}$; в) $x_n = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\ldots(1-\frac{1}{(n+1)^2})$;
б) $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$.

45. Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби: $11,(12)$; б) $1,99(2)$

46. Первый член бесконечной геометрической прогрессии a_n равен a, ее знаменатель — q. Найдите сумму:
а) $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{8}a_4 + \ldots$; б) $(a_1+a_2+a_3)^2 + (a_4+a_5+a_6)^2 + (a_7+a_8+a_9)^2 + \ldots$.

47. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если $|x|<1$ и $a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^n})$

48. Сумасшедший турист две первые стоянки сделал где попало, а затем всякий раз ночевал ровно посередине между двумя предыдущими стоянками. Докажите, что через некоторое время он будет топтаться на одном месте и найдите, на каком именно.

49. Докажите, что последовательность, стремящаяся к $+\infty$, достигает своей точной нижней грани.

Предельный переход в неравенствах

Теорема о предельном переходе в неравенствах. Пусть (x_n), (y_n) — две такие последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = Y$, и для почти всех n выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$. Тогда $X \leqslant Y$.

50. Можно ли оба знака неравенства в теореме о предельном переходе заменить на строгие?

Теорема о зажатой переменной ("о двух милиционерах"). Пусть (x_n), (y_n), (z_n) — три последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, и почти для всех n выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Тогда последовательность (y_n) также сходится к A.

51. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

52. Докажите, что если для почти всех n $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

53. Пусть для почти всех n $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. а) Обязательно ли последовательность a_n сходится? б) Может ли последовательность a_n иметь предел, отличный от нуля?

54. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малы:
а) $\left(\frac{n}{2^n}\right)$; б) $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ при всех $a>0$ *(факториал растет быстрее геометрической прогрессии)*;
в) $\left(\frac{n^k}{a^n}\right)$ при всех $c \in \mathbb{N}$ и $a>1$ *(геометрическая прогрессия растет быстрее любой степени)*.

55. Все члены последовательности положительны, а сумма любого их числа не превосходит 1. Докажите, что последовательность стремится к нулю.