Предел и непрерывность функции - 1

Предел функции на бесконечности. Бесконечно малые функции.

1. а) Постройте график функции $f(x) = \dfrac{2x+4}{x}$. Назовите число, близкое к значениям функции при больших значениях аргумента.
   б) Укажите такое число M_1, что при всех $x > M_1$ выполняется неравенство $|f(x) - 2| < 0,1$. в) Укажите такое число M_2, что при всех $x > M_2$ выполняется неравенство $|f(x) - 2| < 0,001$.
   г) Докажите, что $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - 2| < \varepsilon)$.

   Определение. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to +\infty$, если
   $$(\forall\varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - b| < \varepsilon).$$
   Пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.
2. Сформулируйте определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.
3. Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при $x \to +\infty$.

   Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.
4. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно мала при $x \to +\infty$.
5. Докажите, что если функция $\beta(x)$ — бесконечно мала при $x \to +\infty$, и существует луч $(M, +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то и $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.
6. Докажите, что произведение бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.
7. Рассмотрим произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ и ограниченной на $\mathbb{R}$ функций. Обязательно ли полученная функция: а) бесконечно малая при $x \to +\infty$; б) ограниченная на $\mathbb{R}$?
8. Докажите, что сумма бесконечно малых функций бесконечно мала.
9. Что можно сказать о разности бесконечно малых функций? А о частном?
10. Произведение двух функций бесконечно мало. Обязательно ли одна из них бесконечно мала?
11. Какие из следующих функций бесконечно малы при $x \to +\infty$ и почему:
    а) $\dfrac{x^3}{x^4+1}$; б) $\dfrac{x}{10^{300}}$; в) $\dfrac{10^{300}}{x}$; г) $\dfrac{2^{[x]} + 3^{[x]}}{6^{[x]}}$?

    Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$. Тогда:
    1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = a + b$. (*предел суммы равен сумме пределов*)
    2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (fg)(x) = ab$. (*предел произведения равен произведению пределов*)
    3) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. (*предел частного равен частному пределов*)
    4) $\lim\limits_{x\to+\infty} kf(x) = k \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (*постоянный множитель можно выносить за знак предела*)
12. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+4x-6}{2x^3-8x^2+12x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+4x+10}{2x^4-5x}$;
    в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x^2)^{10}}{(1+2x^{10})^2}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+3x^{11})^3}{(1+8x^5)^7}$.

    Определение. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to +\infty$, если $(\forall N)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x)| > N)$. Пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.
13. Докажите, что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.
14. Объясните, что означает $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
15. Что можно сказать о пределе суммы:
    а) двух бесконечно больших функций;
    б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный предел?
16. Что можно сказать о пределе произведения:
    а) двух бесконечно больших функций;
    б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный ненулевой предел;
    в) бесконечно большой и бесконечно малой функций?
17. Докажите, что многочлен ненулевой степени — бесконечно большая функция.
18. Что можно сказать о пределе при $x \to \infty$ рациональной функции (частного двух многочленов) в зависимости от степеней числителя и знаменателя?

Предел и непрерывность функции - 2

Предел функции в точке.

Определение. ***Проколотой ε-окрестностью*** точки a называется объединение интервалов $(a-\varepsilon;\ a)\cup(a;\ a+\varepsilon)$.

Если во всех точках какой-нибудь проколотой ε-окрестности точки a выполняется некоторое свойство функции, то говорят, что это свойство выполняется ***вблизи*** точки a.

19. Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. а) Определите знак функции $f(x)$ вблизи точки 2. Означает ли это, что $f(2)>0$?
б) Найдите с точностью до $0,000001$, чему равно значение $f(x)$ вблизи точки 2. Означает ли это, что $f(2)=4$?
В подобной ситуации говорят, что $f(x)\to 4$ при $x\to 4$, и пишут $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

Определение 1. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Определение 2. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что если x находится в ней, то$f(x)$ находится в ε-окрестности точки b.

Определение 3. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x\to a$, если

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon))((0<|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

Ясно, что все три определения на самом деле разные формы одного и того же. Его называют определением ***по Коши***.

20. Докажите, что: а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}$.

Теория предела функции в точке аналогична теории предела функции на бесконечности. Надо лишь как в определениях, так и в доказательствах заменять лучи на проколотые окрестности.

21. Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при $x\to a$.
22. Сформулируйте определения бесконечно малой и бесконечно большой в данной точке функции.
23. Докажите, что произведение и сумма бесконечно малых в данной точке функций — бесконечно малая функция. Что можно сказать о частном двух функций, бесконечно малых в данной точке? Что можно сказать о произведении бесконечно малой в данной точке функции и функции, ограниченной вблизи этой точки?
24. Сформулируйте и докажите теоремы о сумме, произведении и частном пределов функции в точке.
25. а) Можно ли постоянный множитель выносить за знак предела? Почему?
б) Верно ли равенство: $\lim\limits_{x\to\frac12}[2x]=2\lim\limits_{x\to\frac12}[x]$? Почему?
26. Докажите, что предел многочлена в точке a равен его значению в этой точке.
27. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4+4x^3+1}{(x-1)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, где $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a-c;\ a)$ для некоторого положительного c. Тогда число b называется ***пределом слева*** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon))((a-\delta<x<a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon))$.

28. Дайте определение предела функции справа.
29. Докажите, что функция имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке пределы как слева, так и справа, причем эти пределы совпадают.
30. Изобразите графики функций, которые бы в точке $x_0=2$:
а) имели бы предел слева, но не имели бы предела справа;
б) имели бы разные пределы слева и справа.

Домашнее задание

31. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x-6}{x^3+15x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+4x+10}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})$.
32. Докажите, пользуясь только определением, что $\lim\limits_{x\to -3} x^2=9$.
33. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-3x^2+2x-4)$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5+2x+x^2}{x^3+3x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^3+2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;
д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\dfrac{2}{x-2}\right)$.

Предел и непрерывность функции - 3

Непрерывные функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Критерий непрерывности. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции (т.е. $\lim\limits_{x-x_0\to 0}(f(x) - f(x_0)) = 0$)

34. Сформулируйте определение непрерывной функции на языке "$\varepsilon - \delta$" и сделайте соответствующий чертеж.
35. Сформулируйте определение функции, непрерывной слева (справа).

Определение. Функция называется ***непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества. (Непрерывность в конце отрезка предполагается односторонней)

Ранее было показано, что многочлен непрерывен на $\mathbb{R}$, а рациональная функция — на всей области определения. Вот более общее утверждение:

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны и функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f(x))^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Если $g(x) \neq 0$, то непрерывна и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

36. Докажите, что функция: а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = |x|$ непрерывна на всей области определения.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и не является в точке x_0 непрерывной. Тогда точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

37. Сформулируйте определение точки разрыва на языке "$\varepsilon - \delta$".
38. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и:
а) разрывной только в одной точке;
б) разрывной в каждой точке;
в) непрерывной ровно в одной точке;
г) непрерывной ровно в двух точках.

Классификация точек разрыва. Пусть x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$. Если в точке x_0 существуют конечные пределы функции $f(x)$ как слева, так и справа, то x_0 называется точкой разрыва ***первого рода***, в противном случае — ***второго рода***.

Разрыв первого рода называется ***устранимым***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. При этом $f(x)$ может либо отличаться от этих пределов, либо вообще не существовать.

Неустранимый разрыв первого рода называется ***конечным скачком***. В этом случае конечные пределы функции $f(x)$ слева и справа существуют, но не равны друг другу.

Точка разрыва второго рода называется ***полюсом***, если оба односторонних предела в ней равны $\pm\infty$ и ***существенно особой точкой*** в противном случае.

39. Приведите примеры функций, имеющих описанные виды разрыва.
40. Исследуйте на непрерывность следующие функции: а) $y = [x]$; б) $y = \{x\}$; в) $y = \dfrac{[x]}{\{x\}}$; г) $y = \dfrac{1}{x}$ при $|x| > 1$ и $y = x^2$ при $|x| \leqslant 1$.

Определение. Композиция двух функций $f(x) = g(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией***.

41. Пусть $f(x) = \cos x$; $g(x) = 2x - 3$; $\varphi(x) = \sqrt{x}$.
а) Задайте формулой функции $g(\varphi(x))$; $\varphi(f(g(x)))$.
б) Запишите в виде композиции функции $\cos\sqrt{x}$; $2\sqrt{\cos x} - 3$.
42. Верно ли равенство: а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} |2x| = |\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x|$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} [2x] = [\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x]$?

Лемма. Пусть $f(x) = g(\varphi(x))$ — сложная функция, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$, а $g(x)$ непрерывна в точке b. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} g(\varphi(x)) = g(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x))$. (*Знак непрерывной функции и знак предела можно менять местами*)

Теорема о непрерывности сложной функции. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $g(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

43. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 7} - 4}{x^2 - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{\dfrac{1 - |x|}{x + 1}}$.
44. Пусть функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$. Верно ли, что если композиция $g(\varphi(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(\varphi(x)) = c$?
45. ***Функция Дирихле.*** $D(x) = 1$ для $x \in \mathbb{Q}$, и $D(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Исследуйте функцию Дирихле на непрерывность. Какого рода у нее разрывы?

46. ***Функция Римана***. Запишем каждое рациональное число (кроме 0) в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и определим функцию $R(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$. Если же $x = 0$ или x иррационально, то $R(x) = 0$. Исследуйте функцию Римана на непрерывность. Какого рода у нее разрывы?

47. ***Канторова лестница***. Будем определять $C(x)$ пошагово.
1 шаг. Пусть $C(0) = 0$, $C(1) = 1$.
2 шаг. Разделим отрезок $[0;\ 1]$ на три равные части и положим $C(x) = \frac{1}{2}$ при $x \in [\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}]$.
3 шаг. Разделим каждый из 2 отрезков $[0;\ \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3};\ 1]$ на три равные части и положим $C(x) = \frac{1}{4}$ при $x \in [\frac{1}{9};\ \frac{2}{9}]$ и $C(x) = \frac{3}{4}$ при $x \in [\frac{7}{9};\ \frac{8}{9}]$.
4 шаг. Разделим каждый из 4 отрезков $[0;\ \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9};\ \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3};\ \frac{7}{9}]$ и $[\frac{8}{9};\ 1]$ на 3 равные части и в их центральных частях положим $C(x)$ соответственно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$.
Функция $C(x)$ получается в результате выполнения бесконечного числа шагов.
а) Какова область определения функции Кантора?
б) Исследуйте ее на непрерывность.

48. Приведите пример функции, определенной на R и: а) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; б) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.