

Выход в пространство

67. а) На плоскости даны три параллельные прямые и три точки. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а данные точки лежат на прямых, содержащих его стороны.
- б) На плоскости даны три луча с общим началом, и внутри каждого из образованных ими углов отмечено по точке. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных лучах, а стороны проходили через данные точки.

68. Теорема Дезарга.

- а) Вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ принадлежат параллельным прямым AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 пересекаются в точках X , Y и Z , то точки X , Y и Z лежат на одной прямой.
- б) Как изменится формулировка теоремы, если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 пересекаются в точках X и Y , а прямые AC и A_1C_1 параллельны?
- в) А если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 попарно параллельны?
- г) Вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ принадлежат трем прямым AA_1 , BB_1 и CC_1 , пересекающимся в точке O . Докажите, что если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 пересекаются в точках X , Y и Z , то точки X , Y и Z лежат на одной прямой.
- д) Как изменится формулировка теоремы, если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 пересекаются в точках X и Y , а прямые AC и A_1C_1 параллельны?
- е) А если прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 попарно параллельны?

Проективное замечание. Пополним каждую прямую бесконечно удаленной точкой. При этом параллельные прямые пополняются одной и той же точкой. Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. Теперь все прямые пересекаются (правда, некоторые в бесконечно удаленных точках). Через две любые точки по-прежнему проходит одна прямая (подумайте, что это означает, если одна или обе точки бесконечно удаленные). С этой точки зрения все шесть вариантов теоремы Дезарга содержатся в утверждении пункта а).

69. Правильный шестиугольник разрезан на равновеликие параллелограммы. Докажите, что их число делится на 3.
70. На продолжениях диагоналей правильного шестиугольника выбраны точки K , L , M так, что стороны шестиугольника пересекаются со сторонами треугольника KLM в шести точках, являющихся вершинами некоторого другого шестиугольника N . Продолжим те стороны шестиугольника N , которые не лежат на сторонах треугольника KLM . Пусть точки P , Q , R – точки их попарных пересечений. Докажите, что точки P , Q и R лежат на продолжениях диагоналей исходного шестиугольника.

Больше задач, хороших и разных

71. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины ребер BB_1 и CC_1 . Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $PQ : OQ$.
72. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1 . Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1 . Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $CA_1 = a$.
73. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M , N и K – середины ребер BC , AC и AB соответственно. Докажите, что прямые MA_1 , NB_1 и KC_1 пересекаются в одной точке.
74. В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD , вершину C и точку N ребра BD , делящую его в отношении $BN : ND = 2 : 1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок KP , где K и P – середины ребер AB и CD соответственно?
75. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ABD . На этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что EF параллельно BC . Найдите отношение EF к BC .