

**Угол между прямыми. Скалярное произведение векторов****Нахождение угла между прямыми по определению**

Определение. *Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным.*

Корректность этого определения следует из теоремы:

Теорема. *Величины двух плоских выпуклых углов с соответственно сонаправленными сторонами равны.*

Определение. *Прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен  $90^\circ$ .*

Определение. *Углом между векторами называется угол между изображающими их направленными отрезками, отложенными от одной точки.*

Замечание. *Угол между прямыми принимает значения от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , а угол между векторами – от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .*

107. Верно ли, что если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны?

108. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми: а)  $AD_1$  и  $A_1 B$ ; б)  $AC_1$  и  $A_1 B$ .

109. Найдите угол между скрещивающимися медианами граней правильного тетраэдра. Рассмотрите два случая.

**Скалярное произведение векторов. Пространственная теорема Пифагора**

Определение и свойства скалярного произведения в пространстве такие же, как и на плоскости.

110. Решите задачу 3 с помощью векторов.

111. В правильном тетраэдре  $PABC$  на ребре  $PC$  взята точка  $E$  такая, что  $PE : EC = 1 : 2$ ,  $M$  – центроид грани  $APB$ . Найдите длину отрезка  $ME$ , если длина ребра тетраэдра равна  $a$ .

112. Докажите, что боковое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости его основания.

Пространственная теорема Пифагора. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений.*

113. Докажите обобщение пространственной теоремы Пифагора: *Квадрат длины отрезка равен сумме квадратов длин его ортогональных проекций на три любые взаимно перпендикулярные прямые.*

114. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с длиной ребра  $a$ . Точка  $O$  – центр грани  $CDD_1 C_1$ ,  $M$  – середина отрезка  $A_1 O$ ,  $P$  – середина ребра  $DD_1$ , точка  $K$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $B_1 K : C_1 K = 1 : 5$ . Найдите а)  $KP$ ; б)  $KO$ ; в)  $KM$ .

115. Даны точки  $A, B, C, D$ , не лежащие в одной плоскости. Найдите точку  $M$ , для которой сумма  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  принимает наименьшее значение.

116. В треугольной пирамиде сумма квадратов длин сторон основания равна  $a^2$ , а сумма квадратов длин боковых ребер равна  $b^2$ . Найдите длину отрезка, соединяющего вершину пирамиды с точкой пересечения медиан основания.

**Вычисление углов с помощью скалярного произведения**

117. Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер соответственно  $BC$  и  $AD$  тетраэдра  $ABCD$ , в котором  $AC=BD$ , а угол между прямыми  $AC$  и  $BD$  равен  $\alpha$ . Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $AC$ .

118. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  длины ребер  $AB$  и  $BC$  равны соответственно  $a$  и  $2a$ . Известно, что существует прямая, пересекающая прямые  $AA_1$ ,  $BC$  и  $C_1 D_1$  и образующая с ними равные углы. Найдите длину ребра  $AA_1$ .

**Домашнее задание**

119. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями боковых граней треугольной призмы, все боковые грани которой – квадраты. Решите задачу: а) непосредственным построением угла; б) с помощью скалярного произведения.

120. Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $AA_1 = 3$ . На ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$ ,  $BK = 1$ . На отрезке  $B_1 D$  отмечена точка  $M$ ,  $B_1 M : MD = 1 : 3$ . Точка  $P$  делит отрезок  $D_1 C$  в отношении  $CP : PD_1 = 1 : 2$ . Найдите с помощью теоремы Пифагора стороны треугольника  $KPM$ .

121. Даны три некопланарных вектора. Существует ли ненулевой четвертый вектор, перпендикулярный трем данным?

122. Докажите, что для любых четырех точек пространства  $A, B, C, D$  имеет место равенство  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$ .

123. Докажите, что если две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны, то перпендикулярны и два оставшихся ребра.

124. Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер соответственно  $BC$  и  $AA_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $F$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $BF : FB_1 = 2 : 3$ . Точка  $T$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $A_1 T : TD_1 = 4 : 1$ . Найдите угол между прямыми  $FT$  и  $MN$ .