

Программа экзамена по математическому спецкурсу.

- 1) Уравнение Пелля. Групповая структура на множестве решений. Доказательство того, что любое положительное решение уравнения Пелля есть степень фундаментального.
- 2) Неравенство Бернулли. Предел последовательности. Существование сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности. Сходимость $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- 3) Подстановки и самосовмещения. Симметрическая группа. Самосовмещения многоугольников как подстановки множества их вершин. Количество самосовмещений правильных n -угольников и платоновых тел.
- 4) Понятие группы. Изоморфизмы групп. Циклические группы, свободная группа. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы. Приведённая система вычетов как группа. Теоремы Эйлера и Вильсона из теории чисел.
- 5) Гомоморфизмы групп. Понятия нормального делителя и факторгруппы. Факторгруппа как группа смежных классов. Нормальность коммутанта группы.
- 6) Конические сечения. Геометрическое определение эллипса и гиперболы. Оптическое свойство эллипса и гиперболы, изогональное свойство эллипса и гиперболы. Сферы Данделена.
- 7) Канонические уравнения эллипса и гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$. Эквивалентность алгебраического и геометрического определений эллипса и гиперболы.
- 8) Экспоненциальный ряд: сходимость, мультипликативное свойство, монотонность, непрерывность. Натуральный логарифм. Действительная степень положительного числа.
- 9) Конечные автоматы и теорема Нероуда. Машина Тьюринга и теорема об алгоритмической неразрешимости самоприменимости. Схемы из функциональных элементов с элементами задержки как конечные автоматы.
- 10) Булевы функции. Задание булевой функции схемой из функциональных элементов и формулой. Замкнутые классы булевых функций. Классы T_0, T_1, S, M, L . Полные системы булевых функций, теорема Поста. Базис из булевых функций, количество функций в нём.
- 11) Зацепления и косы. Плоская диаграмма зацепления. Движения Рейдемейстера. Эквивалентность восьмёрки и зеркальной восьмёрки. Понятие правильной раскраски зацепления. Инвариантность количества правильных раскрасок относительно движений Рейдемейстера. Неэквивалентность трилистника и восьмёрки. Нерасцепляемость колец Борромео. Косы как группа. Базисные косы, коммутаторы базисных кос. Уравнение Янга-Бакстера.
- 12) Понятие дифференцируемости. Арифметические свойства производной: производная линейной комбинации функций и правило Лейбница. Производная сложной функции. Теорема о производной обратной функции.
- 13) Принцип Ферма как необходимое условие экстремума в точке дифференцируемости функции. Теоремы Ролля и Лагранжа. Участки монотонности функции. Достаточные условия экстремума: разная монотонность производной по разные стороны от точки возможного экстремума, отличие от нуля второй производной в точке возможного экстремума. Выпуклость функции, неравенство Йенсена.
- 14) Теоремы Ролля и Лагранжа для полиномиальной аппроксимации. Теорема Лагранжа о погрешности полиномиальной аппроксимации. Многочлен Тейлора как полиномиальная аппроксимация. Остаточный член многочлена Тейлора в форме Пеано и в форме Лагранжа. Ряд Тейлора. Сходимость ряда Тейлора в 0 для экспоненты, синуса и косинуса.
- 15*) Равенство $e = \exp 1$.
- 16*) Кривые на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентные кривые. Вариация кривой, аддитивность вариации, независимость вариации от выбора параметризации. Непрерывность. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Вариация непрерывной кривой.
- 17*) Логарифм как площадь под участком гиперболы. Обоснование геометрического определения логарифма. Логарифм числа, меньшего 1. Геометрический смысл аддитивного свойства логарифма. Константа Эйлера-Маскерони. Логарифм в задачах физического содержания: барометрическая формула, задача о верёвке, намотанной на бревно.
- 18*) Задача о письмах и задача о принцессе и толпе принцев.
- 19*) Теория вероятностей. Определение случайной величины. Сумма случайных величин и формула полной вероятности. Матожидание и дисперсия случайной величины, неравенство Чебышёва, закон больших чисел. Биномиальное, геометрическое и пуассоновское распределения.