

Движения в пространстве.

Движение в пространстве, как и на плоскости, — преобразование пространства в себя, сохраняющее расстояния между точками. Многие свойства движений в пространстве аналогичны соответствующим свойствам движений плоскости; доказательства также зачастую похожи.

Примерно так же, как в плоскости, можно доказать, что движение — биекция. Отсюда следует, в частности, что любое движение обратимо, причём обратное преобразование тоже движение. Композиция движений — движение (почему?), так что движения в пространстве образуют группу, единицей которой служит тождественное движение.

Известная из планиметрии "лемма о трёх гвоздях" имеет свой аналог в пространстве.

1) а) Докажите "лемму о четырёх гвоздях": если четыре некопланарные точки при некотором движении переходят в себя, то это движение — тождественное преобразование.

б) Докажите, что движение однозначно определяется образами любых четырёх некопланарных точек.

Рассмотрим три простейших движения пространства: сдвиг на вектор, поворот на данный угол вокруг данной оси и зеркальную симметрию — отражение относительно плоскости.

2) Определите род, найдите неподвижные точки, прямые, плоскости для:

- а) сдвига;
- б) поворота вокруг оси;
- в) зеркальной симметрии;

3) Что является композицией двух зеркальных симметрий, если зеркальные плоскости:

- а) параллельны и удалены друг от друга на расстояние d ;
- б) пересекаются по прямой l под углом φ ?

Поворот вокруг оси на 180° называется осевой симметрией и довольно часто встречается в задачах.

4) Что является композицией двух осевых симметрий, если оси симметрии:

- а) параллельны и удалены друг от друга на расстояние d ;
- б) пересекаются под прямым углом;
- в) скрещиваются под прямым углом и удалены друг от друга на расстояние d ;
- г) пересекаются под углом φ ?

Композициями простых движений разных типов получаются сложные движения. Их тоже три вида.

5) Какими должны быть параметры простых движений разных типов (отличных от Id), чтобы они коммутировали между собой? Рассмотрите случаи:

- а) зеркальная симметрия и сдвиг;
- б) вращение вокруг оси и сдвиг;
- в) вращение вокруг оси и зеркальная симметрия.

Полученные Вами сложные движения называются **винтовым движением**, **поворотным отражением** и **скользящим отражением**. Догадайтесь, какое именно как называется.

Одно из сложных движений тоже играет важную роль в приложениях и удостоилось особого названия.

6) Рассмотрите композицию трёх зеркальных симметрий относительно взаимно перпендикулярных плоскостей. Опишите, куда переходят точки при такой композиции. Какого рода это движение? Каким типом сложного движения оно является? Как бы Вы назвали такое движение?

7) В понедельник столяр Петрович выпилил бревно и положил его на землю. Внимательно на него посмотрев, он обнаружил, что бревно имеет пересекающиеся вертикальную и горизонтальную оси симметрии, а больше осей симметрии не имеет. Докажите, что Петрович был в понедельник не слишком трезв.

8) Во вторник столяр Петрович снова посмотрел на своё бревно и обнаружил, что вертикальная и горизонтальная оси симметрии бревна не пересекаются. Докажите, что и во вторник Петрович был пьян.

Снова вернёмся к началу листка.

9) Пользуясь задачей 1 б) докажите, что каждое движение пространства — композиция не более чем четырёх зеркальных симметрий.

Разбирая возможные случаи композиция не более чем четырёх зеркальных симметрий (это нетрудно, но довольно кропотливо), можно доказать, что получаются в точности три типа сложных движений, про которые говорилось в задаче 5 (очевидно, что простые движения — частные случаи сложных). Это — теорема Шаля для пространства.