Теория-07. На подступах к задаче С3.

Задачи с модулем.

Задачи с модулем могут быть составной частью любого алгебраического задания (чаще С3, но и С5, и С1).

Раскрытие модуля — основной приём работы с модулем. Он основан на определении: $|x| = x$ при $x \geqslant 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. Раскрывая модуль $|A(x)|$, находят точки, где $A(x) = 0$, и тогда эти "ключевые" точки разбивают числовую прямую на несколько областей, на каждой из которых понятен знак $A(x)$ и тем самым понятно, как раскрывается модуль. Если есть несколько модулей подряд, можно для всех найти и одновременно расставить на прямой ключевые точки.

Геометрически $|a|$ это расстояние от точки a до нуля на числовой прямой. Поэтому $|a - b|$ — расстояние между a и b. Это соображение можно использовать для быстрого решения уравнения или неравенства.

Раскрывать модуль иногда трудоёмко и неудобно. Можно воспользоваться следующими эквивалентностями для равенств:

$$|A| = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \pm B \\ B \geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad |A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad A = \pm B$$

И для неравенств:

$$|A| \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \leqslant B \\ A \geqslant -B \end{cases} \qquad\qquad |A| \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \leqslant B \\ A \geqslant -B \end{array} \right.$$

Убедитесь самостоятельно, что это всё и вправду так.

Полезно помнить, что $|ab| = |a| \cdot |b|$ и $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, это часто полезно при преобразованиях.

Наконец, иногда помогает знание того факта, что модуль тесно связан с корнем: $|t|^2 = t^2$ и $\sqrt{t^2} = |t|$.