Четность биномиальных коэффициентов.

Напомним, что треугольник Паскаля состоит из чисел C_N^K. Для этих чисел есть явная формула $C_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!}$. Они являются целыми, так как считают число K элементных подмножеств N элементного множества. Они также называются биномиальными коэффициентами, так как фигурируют в формуле бинома Ньютона: $(a+b)^N = \sum_{K=0}^{N} C_N^K a^k b^{N-K}$.

Рассмотрим треугольник Паскаля по модулю 2. Т.е. заменим все числа C_N^K на их остатки. Получающийся треугольник строится при помощи той рекуррентной формулы, но со сложением по модулю 2: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$. На рисунке справа выписаны 16 первых строчек этого треугольника, рядом с каждой строкой указан ее номер: число N от 0 до 15.

Пусть a_N — число единиц в N-й строке. Легко посчитать первые несколько чисел из этой последовательности:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 2,\ a_5 = 4,\ a_6 = 4,\ a_7 = 8,\ a_8 = 2,\ a_9 = 4,\ a_{10} = 4,\ a_{11} = 8,\ a_{12} = 4,\ a_{13} = 8,\ a_{14} = 8,\ a_{15} = 16,\ \ldots$$

0	1
1	1 1
2	1 0 1
3	1 1 1 1
4	1 0 0 0 1
5	1 1 0 0 1 1
6	1 0 1 0 1 0 1
7	1 1 1 1 1 1 1 1
8	1 0 0 0 0 0 0 0 1
9	1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
10	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
11	1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
12	1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
13	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
14	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
15	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
	....

Легко увидеть следующую закономерность:

Теорема 1. Число a_N всегда является степенью двойки.

Теорему сразу доказывать непросто, но легко увидеть следующий факт:

Лемма 2. Число a_N является четным.

Доказательство 1. Как мы знаем, что треугольник Паскаля является симметричным. Если N является нечетным, то в N-й строке — четное число чисел (а именно $N+1$), они разбиваются на пары равных, значит, количество единиц четно.

Если N является четным, $N = 2M$, то среднее число в N-й строке сравнимо с C_{2M}^M которое равно сумме двух стоящих над ним $C_{2M-1}^{M-1} + C_{2M-1}^{M} = 2C_{2M-1}^{M-1}$, значит, является четным (а в треугольнике Паскаля по модулю 2 стоит 0). Остальные числа в N-й строке опять разбиваются на пары симметричных значит, количество единиц в строке четно. $\square$

Доказательство 2. Условие, что a_N четно означает, что в строке треугольнике Паскаля по модулю два четное число единиц. Эквивалентно, в исходном треугольнике Паскаля в строке четное число нечетных чисел, а это равносильно, тому, что сумма чисел в строке — четна. С другой стороны мы знаем, что эта сумма равна $C_N^0 + C_N^1 + \ldots + C_N^N = 2^N$, т.е. четна. $\square$

Для изучения последовательности a_N удобно вначале изучать `крайние` случаи: когда a_N минимально или максимально.

Лемма 3. При $N > 0$ верно неравенство $2 \leq a_N \leq N + 1$

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что по краям строки стоят единицы. Второе следует из того, что в строке всего $N + 1$ число. $\square$

Глядя на первые 15 членов последовательности видно, что минимум достигается на номерах 1,2,3,8, а максимум на номерах 1,3,7,15.

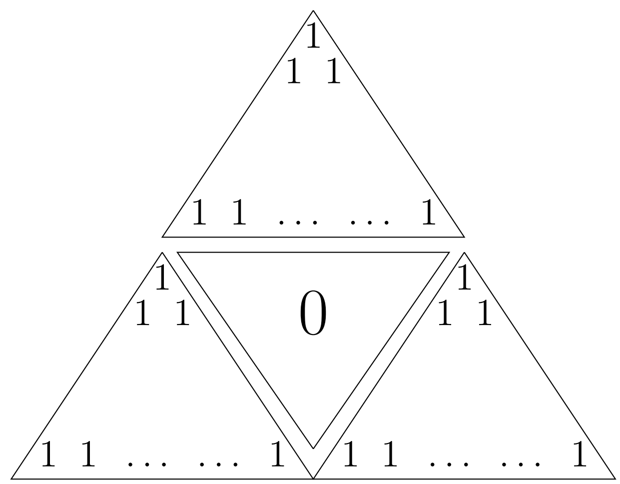
Лемма 4. $a_N = 2$ тогда и только тогда, когда $N = 2^l$. Также $a_N = N + 1$ тогда и только тогда, когда $N = 2^l - 1$.

Лемма 5. Условие, что $a_N = N + 1$ равносильно тому, что $a_{N+1} = 2$.

Доказательство леммы 5. За строкой из одних единиц строит строка, где по краям стоят единицы, а все остальные числа нули. И наоборот. $\square$

Таким образом два утверждения в лемме 4 равносильны.

Доказательство леммы 4. Индукция по l. База была проверена выше. Переход от l к $l + 1$.



Рассмотрим строчку с номером 2^l. В ней стоит $2^l + 1$ элемент, из которых средние $2^l - 1$ элементов нули. В строчке ниже под этими нулями тоже будут нули, которых будет на один меньше. И так далее, образуется равносторонний треугольник состоящий только из нулей который занимает $2^l - 1$ строку.

По краям 2^l-й строки стоят единицы. Пока они разделены нулями — они не взаимодействуют, и из них происходят треугольники такие-же, как начало треугольника Паскаля. Через 2^l строк (т.е. на $2^l - 1 + 2^l = 2^{l+1} - 1$-й сроке) нули посередине заканчиваются и эти два треугольника сливаются. Получается, что $(2^{l+1} - 1)$-я строка состоит из двух строк с номерами $2^l - 1$. По предположению индукции мы знаем, что в строке треугольника Паскаля с номером $2^l - 1$ стоят одни единицы. Значит и в полученной строке треугольника Паскаля стоят одни единицы, $a_{2^{l+1}-1} = 2^{l+1}$ и $a_{2^{l+1}} = 2$.

Из рассуждения выше также видно, что при $2^l < N < 2^{l+1} - 1$ верно, что $a_N > 2$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Докажем по индукции утверждение, что при $0 \leqslant N < 2^l$ верно, что a_N — стрепень двойки. База была проверена выше.

Переход от l к $l + 1$. Если, $N < 2^l$, то по предположению индукции. Если $N = 2^l + N_1$, где $0 \leqslant N_1 < 2^l$ то из доказательства леммы 4 следует, что $a_N = 2a_{N_1}$, значит, по предположению индукции a_N тоже степень двойки. $\square$

Замечание 1. Из леммы 4 следует, что $C_{2^l}^K \equiv 0 \pmod 2$, при $K \neq 0, 2^l$. Этот факт можно доказать по другому, алгебраически. По биному Ньютона $(a + b)^{2^l} = \sum_{K=0}^{2^l} C_{2^l}^K a^k b^{2^l - K}$, значит, нам нужно доказать, что

$$(a + b)^{2^l} = a^{2^l} + b^{2^l} + 2 \cdot (\ldots),$$

где в скобках стоит какой-то многочлен от a, b с целыми коэффициентами. Докажем это равенство по индукции. База $l = 1$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2(ab).$$

Переход от $l-1$ к l:

$$(a+b)^{2^l} = \left((a+b)^{2^{l-1}}\right)^2 = \left(a^{2^{l-1}} + b^{2^{l-1}} + 2\cdot(\ldots)\right)^2 = a^{2^l} + b^{2^l} + 2\cdot(\ldots),$$

где во втором равенстве мы воспользовались предположением индукции, а в последнем расскрыли скобки и привели подобные. □

Замечание 2. Возникшая в треугольнике Паскаля по модулю 2 структура из единиц и нулей напоминает так называемый треугольник Серпинского.

`https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle`