

## Делимость

**Определение.** Целое число  $a$  делится на целое число  $b \neq 0$ , если существует такое целое число  $c$ , что выполняется равенство  $a = bc$ . (Обозначение:  $a : b$ )

**Пример 1.** Вася пропустил в определении делимости упоминание о том, что числа целые. Покажите с помощью примера, чем плохо такое "определение".

**Пример 2.** а) На какие целые числа делится  $0$ ? б) Петя пропустил в определении делимости упоминание о том, что  $b \neq 0$ . Покажите с помощью примера, чем плохо такое "определение".

**Свойство транзитивности.** Если  $a : b$ ,  $a b : c$ , то  $a : c$ .

**Свойство суммы и разности.** Если  $a : c$  и  $b : c$ , то  $a \pm b : c$ .

**Пример 3.** Докажите, что  $\overline{abcd} - \overline{cdab} : 11$  для любого четырехзначного числа  $\overline{abcd}$ .

1. Может ли сумма семи слагаемых делиться на число, на которое не делится ни одно из слагаемых?
2. Докажите, что сумма двузначного числа с числом, полученным из него перестановкой цифр, делится на **11**.
3. Известно, что  $a + b$  делится на **7**. Докажите, что  $\overline{aba}$  делится на **7**.
4. Найдите: а) **3**; б) **4**; в) **10** различных натуральных чисел, обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.
5. Четыре эксперта подсчитали по осени цыплят в одном и том же курятнике. И заявили:  
 А: число цыплят делится на **2**;  
 Б: число цыплят делится на **4**;  
 В: число цыплят делится на **12**;  
 Г: число цыплят делится на **24**.  
 Известно, что трое правы, а один эксперт ошибся. Кто именно?
6. Лиза и Настя задумали по трехзначному числу, затем каждая к своему числу приписала еще раз такое же. Затем каждая девочка выписала все делители получившегося шестизначного числа. Докажите, что не менее **8** чисел в их списках совпало.
7. Кирилл вместо того, чтобы решать на кружке задачи, написал **66** семерок подряд. Леня утверждает, что полученное число делится на **13**. Прав ли Леня?
8. При каких  $n$  число  $\underbrace{88\dots8}_n$  делится на 91?  
 $n$  восьмерок
9. а) Дана полоска из **6** клеток. Сережа и Гоша по очереди записывают в клетки цифры. Если полученное число делится на **143**, то выигрывает Сережа, если нет, то Гоша. Гоша ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре обоих? б) А если полоска состоит из **12** клеток? в) А если из **13**?
10. Докажите, что число  $\overline{ababab}$  делится на **7**, **13**, **37**.
11. Решите ребус:  $К \cdot О \cdot Т = У \cdot Ч \cdot Ё \cdot Н \cdot Ы \cdot Й$
12. На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели **10** головок, причем все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные **7** крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

---

*Сверхзадача №4.* Докажите, что все числа **10017**, **100117**, **1001117**,... делятся на **53**.